



Editora
Bernoulli



MATEMÁTICA

Volume 04





MATEMÁTICA

Volume 04

Frente A

07 3 Princípio fundamental da contagem e arranjos

Autores: Paulo Vinícius Ribeiro

Luiz Paulo

08 9 Permutações Autor: Luiz Paulo

Frente B

07 13 Prismas Autor:

Paulo Vinícius Ribeiro

08 19 Pirâmides

Autor: Paulo Vinícius
Ribeiro

Frente C

07 25 Inequações

Autor: Luiz Paulo

08 31 Função
modular Autor: Luiz
Paulo

Frente D

07 39 Triângulo
retângulo Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

08 45 Lei dos senos
e lei dos cossenos
Autor: Paulo Vinícius
Ribeiro

Frente E

Sumário - Matemática 13 51 Cônicas
Autor: Frederico Reis **14 61** Números complexos:
forma algébrica Autor: Paulo Vinícius Ribeiro **15 65**
Números complexos: forma trigonométrica Autor:
Paulo Vinícius Ribeiro

2 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Princípio fundamental 07 A da contagem e arranjos

INTRODUÇÃO OBSERVAÇÃO

Esse princípio multiplicativo pode ser estendido para
três

A análise combinatória é a parte da Matemática que
se ou mais eventos independentes.

preocupa em contar as possibilidades. Alguns
problemas

bem simples podem ser resolvidos enumerando-se
todas **Exemplos**

as possibilidades. Por exemplo: 1º) Quantos são os
resultados possíveis para o

Quantos são os números ímpares entre 10 e 20?
lançamento de uma moeda três vezes?

Em outras situações, entretanto, a enumeração torna-se **Resolução:**

muito trabalhosa. Nesses casos, é necessária a utilização de Para cada vez que lançarmos a moeda, temos duas

algumas técnicas de contagem. Por exemplo: possibilidades: cara (K) ou coroa (C)

Quantas são as placas de carros que podem ser formadas

com 3 letras e 4 algarismos? 1ª vez 2ª vez 3ª vez
Resultado

O princípio fundamental da contagem nos dá a resposta.

K (K, K, K)

K

COMO CONTAR, SEM CONTAR? C

(K, K, C) K

K (K, C, K)

Se dispomos de 3 bermudas e 2 camisas, todas distintas, C

de quantas formas podemos vesti-las para ir a um churrasco? C (K, C, C)

Vamos, inicialmente, escolher a bermuda. Há K (C, K, K)

3 possibilidades. Para cada uma delas, independentemente K de qual escolhemos, teremos sempre 2 opções de camisa. C (C, K, C)

C

Vejamos: K (C, C, K)

Camisa 1 C

Bermuda 1 C (C, C, C)

Camisa 2

Pela árvore anterior, verificamos que são 8 resultados

Bermuda 2 possíveis. Pelo P.F.C., temos: Camisa 1

Camisa 2

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Camisa 1 1ª vez 2ª vez 3ª vez

Bermuda 3

Camisa 2

2º) Quantos são os números de três algarismos distintos

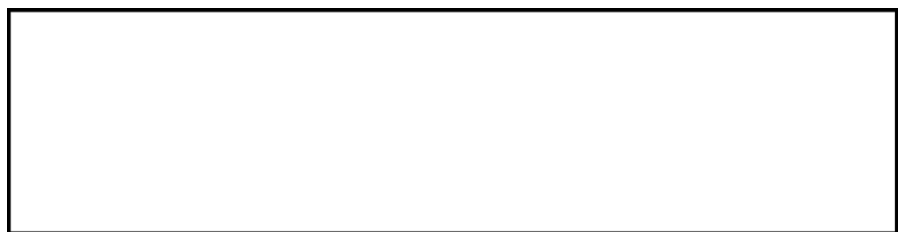
O número de maneiras de vestir-se é, portanto, $3 \times 2 = 6$. que podemos formar com os algarismos do sistema

decima

Nesse exemplo, aplicamos, de maneira intuitiva, o princípio fundamental da contagem (P.F.C.), que podemos **Resolução:**

enunciar assim: Temos três posições para preencher. Como não

podemos começar com zero e os algarismos devem



Se um determinado evento pode ocorrer de x ser distintos, pelo P.F.C., temos:

maneiras, e um outro evento pode ocorrer de y maneiras

(independentemente do resultado do primeiro evento), então $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

os dois juntos podem ocorrer de $x \cdot y$ maneiras.

possibilidades

Editora Bernoulli 3

Frente A Módulo 07

3º) De quantas maneiras dois casais podem se sentar em 2º caso: Pares não terminados em zero.

dois degraus de uma escada para tirar uma

fotografia,

se em cada degrau deve ficar um casal? {2, 4, 6, 8}

4

Resolução:

possibilidades

Temos quatro posições a serem preenchidas na escada.

Logo, pelo P.F.C., teremos:

1ª 2ª

$$3^a \cdot 4^a \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$$

Na 1ª posição, podemos colocar qualquer pessoa Todos, menos o zero Todos, menos os (4 possibilidades). Depois de preenchida a e o número par utilizado dois números já utilizados

1ª posição, para o 2º lugar, temos sempre uma única Somando-se as quantidades de pares, teremos o total:

possibilidade (pois o casal é definido).

$$\text{Total} = 72 + 256 = 328$$

Para a 3ª posição, temos duas possibilidades e, para

a 4ª posição, temos uma possibilidade.

NOTAÇÃO FATORIAL Assim, pelo P.F.C., temos, então, $4.1.2.1 = 8$ formas

diferentes de os dois casais se sentarem na escada. No estudo de problemas de análise combinatória,

frequentemente nos deparamos com produtos em que os

4 1 termos são números naturais consecutivos. Para facilitar a

2 1 representação desses produtos, foi criada a notação fatorial.

4º) Quantos são os números pares com três algarismos Assim, define-se:

distintos que podemos formar com algarismos do



sistema decimal? $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$

$0! = 1$ **Resolução:**

Temos de preencher 3 posições: 1ª 2ª 3ª.

Exemplos

Se escolhermos os algarismos 2 e 3, por exemplo, 1º) Simplificação de frações. para as duas primeiras posições, teremos

4 possibilidades para o 3º algarismo, que deve ser 6! 6 5 . ! 6 = 1 A) = = 5 3 !. ! 5 3 2 !. . 6 par (0, 4, 6, 8).

Porém, se escolhermos inicialmente os algarismos 4 9 !. ! 4 9 !. ! 1 = B) = 2 e 6, teremos 3 possibilidades para o 3º algarismo 10 7 !. ! 10 9 7 6 5 4 . !. . . ! 2 100 (0, 4, 8).

Isso, como vemos, cria um problema que pode ser C) $10.(n + 10)! 10.(n + 10).(n + 9)! (n + 9)! = = 10 !.(n + 10) 10 9 . !.(n + 100) 9$! resolvido iniciando o preenchimento das posições pela

casa que possui a maior restrição. Assim, devemos 2º) Calcular o valor de n. separar o problema em dois casos:

1º caso: $(n + 10)! 110 =$ Pares terminados em zero. $(n + 8)!$

$$\text{possibilidade } (n + 10).(n + 9).(n + 8) \\)! = 110 \Rightarrow n_2 + 19n + 90 = \\ 110 (n + 8)!$$

Logo, pelo P.F.C., teremos:

$$n_2 + 19n - 20 = 0 \Rightarrow n = -20 \text{ ou } n = 1$$

$$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$$

$$n = -20 \text{ (matematicamente inconsistente)}$$

Todos, menos {0} Todos, menos os dois já utilizados Portanto, $n = 1$.

4 Coleção Estudo

Princípio fundamental da contagem e arranjos

ARRANJOS SIMPLES Esse resultado corresponde ao número de arranjos simples

de n elementos, tomados p a p , que indicamos por $A_{n,p}$.



Considere o seguinte problema: $n! A = n, p (n p -)!$
 Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser

formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6? **Exemplo**

Observe que, em um número de três algarismos distintos, Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser

a ordem ocupada por um determinado algarismo é formados com os elementos do conjunto importante, pois, ao trocarmos esse algarismo de posição, $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$? o número como um todo se altera. Pelo princípio fundamental

da contagem, temos: Temos $A 7! 7!_{7,4} = = = 7.6.5.4$
 $= 840$ números.

$(7 4 -)! 3 !$

Centena Dezena Unidade OBSERVAÇÃO

As permutações simples de n elementos de um conjunto

$6 . 5 . 4 = 120$ números podem ser consideradas arranjos simples, nos quais $n = p$.

Assim,
 temos:

$6 5 4 3 2 1 6!$

Observe que $6.5.4 = = . n! n! n! 3 2 1 . . 3! P = A$
 $= = = = n!_{n,n,n} ($

É interessante verificar que há 6 elementos à disposição,

e que cada grupo formado terá 3 elementos cada.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO Dizemos que cada grupo formado é um arranjo simples de

6 elementos, tomados 3 a 3. **01.** (FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa

com De maneira geral, seja um conjunto $A = \{a$ eletrônico de um banco, mas, na hora de digitar a , a , a , ..., a $\}_{1, 2, 3, \dots, n}$ senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número **n** elementos distintos. Queremos formar grupos com

elementos em cada grupo seja importante.

MATEMÁTICA repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. **p** elementos cada ($n > p$), de modo que a ordem dos tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos

O número **MÁXIMO** de tentativas para acertar a senha é

Assim, temos:

A) 1 680 D) 224

Posição 1 Posição 2 Posição 3 ... Posição **p** B) 1 344 E)

$n - 1, n - 2, \dots, n - (p - 1)$ 02. (UFMG) Numa cidade A, os números de telefones têm

Observe que há p posições a serem preenchidas. sete algarismos, sendo que os três primeiros constituem

Temos que o prefixo da cidade. Os telefones que terminam em

10 são reservados para as farmácias e os que têm

- a primeira posição pode ser preenchida de n modos. os dois últimos algarismos iguais, para os médicos e
- hospitais. A quantidade dos demais números de telefones a segunda posição pode ser preenchida de $n - 1$ modos.

disponíveis na cidade A é

- a terceira posição pode ser preenchida de $n - 2$ modos. A) 1 650 D) 8 900

B) 2 100 E) 9 000

- a p -ésima posição pode ser preenchida de $n - (p - 1)$ C) 4 800 modos.

03. (UFMG) Observe o diagrama.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos que o total

de grupos formados é igual a: R

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)] =$$

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - p + 1] = x \cdot y \cdot z$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = s \cdot (n-p)!$$

$n!$ O número de ligações distintas entre **X** e **Z** é

$(n-p)!$ A) 41 B) 45 C) 35 D) 39

Editora Bernoulli **5**

Frente A Módulo 07

04. (UFMG) O número de múltiplos de 10, compreendidos entre **06.** (UFU-MG) Considere uma teia de aranha com

100 e 9 999 e com todos os algarismos distintos, é 7 fios, sendo 3 deles ligando **A** até **B** e 4 ligando **B** até **C**,

A) 250 B) 321 C) 504 D) 576 conforme a figura a seguir. Uma aranha posicionada

em **A** deseja realizar um passeio pela teia saindo de **A**,

05. (UECE-2007) Utilizando apenas os algarismos 2 e 3, caminhando até **B**, posteriormente até **C**, regressando a

a quantidade de números inteiros positivos e menores que **B** e, finalmente, retornando a **A**. De quantas maneiras

1 000 000 (incluindo-se aqueles com algarismos diferentes esse passeio poderá ser realizado sem que a

repetidos) que podem ser escritos no sistema decimal é aranha passe duas vezes pelo mesmo fio da teia?

A) 125 B) 126 C) 127 D) 128

B

A C

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A) 24 B) 36 C) 18 D) 72

01. (UFJF-MG) Temos sete cores distintas e queremos pintar

um painel com quatro listras, cada listra de uma cor

07. (Mackenzie-SP) Uma prova de atletismo é disputada

diferente. O número de maneiras com que isso pode ser por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros.

feito é Os resultados **POSSÍVEIS** para a prova, de modo que

A) 35 C) 2 401 pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras

B) 840 D) 16 384 colocações, são em número de

A) 426 B) 444 C) 468 D) 480 E) 504

02. (VUNESP) **DETERMINE** quantos são os números de três

algarismos, múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas **08.** (UNITAU-SP) Na área de Ciências Humanas, existem

pertencem a $\{1, 2, 3, 4\}$, e os demais algarismos, treze opções no Vestibular da UNITAU. Um candidato

a $\{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$. tem certeza quanto à 1ª opção, mas, quanto à segunda,

03. (Cesgranrio) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada qualquer uma nessa área. De quantas maneiras ele está em dúvida, por isso resolve escolher aleatoriamente

por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam poderá preencher sua ficha de inscrição, sendo a

palpites sobre os países que se classificariam nos 2ª necessariamente diferente da 1ª?

três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil;

A) 156 D) 169

2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada

B) 144 E) 12

tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas

C)
13

diferentes poderiam existir?

A) 69 D) 12 144 **09.** (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde,

B) 2 024 E) 13 824 amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas

C) 9 562 lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com

04. (UFRJ) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades apenas uma cor e que duas casas consecutivas não

é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos diferentes de pintura seriam:

quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação

Primei

que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

A) Se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar.

verde amarelo bege verde cinza

B) Se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro.

C) A soma dos segundo e terceiro algarismos é 5. Segunda:

Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo Dr. Z?

05. (UFRGS) O número de múltiplos de três, com quatro verde cinza verde bege cinza

algarismos distintos, escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9, é **DETERMINE** o número de possibilidades diferentes de

A) 24 B) 36 C) 48 D) 72 E) 96 pintura.

6 Coleção Estudo

Princípio fundamental da contagem e arranjos

10. (UNIRIO-RJ) Com os algarismos de 1 a 9, o total de **16.** (PUC-SP) Uma jarra cilíndrica deve ser pintada com três

números de 4 algarismos diferentes, formados por faixas de cores diferentes, usando-se as tintas disponíveis

2 algarismos pares e 2 ímpares, é igual a verde, vermelha, amarela, azul e preta. O número de jarras

A) 126 D) 1 440 que se pode pintar, com padronagens diferentes, é

B) 504 E) 5 760

11. (UFCE) Considere os números inteiros maiores que 64 000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contêm os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é A) 120 D) 70

A) 2 160 D) 2 280 B) 100 E) 60

B) 1 320 E) 2 400 C) 90

C) 1 440 **17.** (UFU-MG-2006) Para gerar a sua senha de acesso,

12. o usuário de uma biblioteca deve selecionar cinco

(UFRRJ) Para diminuir o emplacamento de carros

algarismos de 0 a 9, permitindo-se repetições e roubados, um determinado país resolveu fazer um

importando a ordem em que eles foram escolhidos. cadastro nacional, no qual as placas são formadas com

Por questões de segurança, senhas que não tenham 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1ª letra da placa

nenhum algarismo repetido são consideradas inválidas. determina um estado desse país. Considerando o alfabeto

Por exemplo, as senhas 09391 e 90391 são válidas e com 26 letras, o número **MÁXIMO** de carros que cada

diferentes, enquanto a senha 90381 é inválida. O número estado poderá emplacar será de

total de senhas válidas que podem ser geradas é igual a

A) 175 760 D) 6 760 000

A) 69 760 C) 50 000

B) 409 500 E) 175 760 000

B) 30 240 D) 19 760

C) 6 500 000

18. (PUC Rio) A partir de outubro, os telefones do Rio de

MATEMÁTICA

13. (FUVEST-SP) Os números de 3 algarismos, todos distintos, Janeiro irão gradualmente adotar oito algarismos, em

que existem no nosso sistema de numeração são vez de sete, por causa da necessidade de oferta de novas

A) 650 D) 640 linhas. O algarismo a ser acrescentado será o primeiro e

B) 648 E) N.d.a será necessariamente 3 ou 8. Supondo-se que, no sistema

C) 649 em vigor, qualquer combinação de sete algarismos é um número de linha possível, o número de possíveis novas

14. (UFSCar-SP) Considere a figura a seguir. O número de linhas é caminhos mais curtos, ao longo das arestas dos cubos, A) 7_{10} D) $3 \times 10_7$

ligando os pontos A e B é B) 10_7 E) 10_8

B $_7$ C) 2×10

19. (UFTM-MG) Um cartógrafo, para fazer o mapa do Sudeste brasileiro mostrado na figura, deverá colorir cada estado O com uma cor, tendo disponíveis 4 cores e podendo repeti-las

no mapa. Estados que fazem divisa entre si devem ter cores distintas. Sabendo que somente SP e ES não fazem A divisa entre si, o número de formas distintas de colorir

A) 2 B) 4 C) 12 D) 18 E) 36 o mapa é

15. (PUC-Campinas-SP) Com os elementos do conjunto

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são formados números de três

MG

algarismos distintos. A quantidade de números formados

ES

cujas soma dos algarismos é um número par é

SP

A) 30 D) 60 RJ

B) 36 E) 72

C) 52 A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

Editora Bernoulli **7**

Frente A Módulo 07

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2007) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies

de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir:

01. (Enem–2004) No Nordeste brasileiro, é comum

encontrarmos peças de artesanato constituídas por **Grupos taxonômicos** **Número de espécies**

garrafas preenchidas com areia de diferentes cores,

formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com Artiodáctilos 4

areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo Carnívoros 18
o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem Cetáceos 2
(casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

Quirópteros 103

Lagomorfos 1

Marsupiais 16

Perissodáctilos 1

o Primatas 20

Fund

Roedores 33

Sirênios 1



Edentados 10

Total 209

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; T&C
AMAZÔNIA, ano 1, nº 3, dez. 2003.

a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira,

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três
nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a

dessas espécies de mamíferos — uma do grupo cetáceos,

mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma

questão de contraste, então o número de variações que outra do grupo primatas e a terceira do grupo roedores.

podem ser obtidas para a paisagem é O número de conjuntos distintos que podem ser formados

com essas espécies para esse estudo é igual a

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

A) 1 320 D) 6 600

02. (Enem–2002) O código de barras, contido na maior parte B) 2 090 E) 7 245

dos produtos industrializados, consiste num conjunto C) 5 845

de várias barras que podem estar preenchidas com cor

escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre

essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida

GABARITO

no número 0 e a de uma barra escura, no número 1.

Observe a seguir um exemplo simplificado de um código

Fixação

em um sistema de código com 20 barras.

01. B 02. D 03. A 04. D 05. B

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita

Propostos

irá ler: 01011010111010110001

01. B 08. E 15. D

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda

irá ler: 10001101011101011010 02. 48 09. 324 16. E

No sistema de código de barras, para se organizar o 03. D 10. D 17.
A

processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar 04. 1 800
11. A 18. C

em consideração que alguns códigos podem ter leitura da
esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, 05. D 12.
D 19. D

como o código 00000000111100000000, no sistema 06. D 13. B

descrito anteriormente. Em um sistema de códigos que

07. B 14. E

utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com

leitura da esquerda para a direita igual à da direita para

Seção Enem

a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras

ou todas as escuras, é

01. B 02. D 03. A

A) 14 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Permutações 08 A

INTRODUÇÃO Esses grupos formados são chamados **permutações**

simples dos **n** elementos, e são indicados por P_n .



Considere o seguinte problema:

$$P_n = n!$$

Quantos números de três algarismos distintos podemos

formar com os dígitos 1, 3 e 7?

Exemplo

Observe que o total de dígitos à disposição é igual à

Determinar o número de anagramas obtidos a partir das

quantidade de elementos (algarismos) de cada número

letras da palavra DOCE.

formado. Os números formados são 137, 173, 317,

371, 713

e 731. Tais números diferem entre si somente pela **ordem**. Cada anagrama é obtido mediante a troca da posição das

na qual os elementos estão dispostos. letras fornecidas. Portanto, trata-se de um problema de

permutações simples. Assim, temos:

Esses agrupamentos são chamados **permutações simples** dos dígitos 1, 3 e 7. $P = 4! = 4.3.2.1 = 24$ anagramas₄

PERMUTAÇÃO SIMPLES PERMUTAÇÕES COM

Considere um conjunto $A = \{a$ **ELEMENTOS REPETIDOS** , a , a , ..., $a\}$ com $1\ 2\ 3\ n$

n elementos distintos. Vamos considerar o problema de

Considere o seguinte problema:

formar grupos com n elementos distintos, de modo que a ordem dos elementos dentro de cada um desses grupos. Quantos são os anagramas da palavra AMANHECE? seja importante.

Devemos, inicialmente, distribuir as 8 letras em 8

posições.

Posição 1 Posição 2 Posição 3 ... Posição n i) A distribuição das letras A e A pode ser feita de

$$\frac{A_8}{2},$$

$n \dots 2 ! n - 1$ modos. Observe que dividimos o resultado $n - 2 !$

por $2!$, porque as permutações das letras A e A são

Observe que há idênticas. n posições a serem preenchidas.

Assim, temos:

ii) Após definirmos as posições das letras A e A, restam

A primeira posição pode ser preenchida de n modos. 6 posições. A distribuição das letras E e E pode ser

A segunda posição pode ser preenchida de $n - 1$ modos. $A_{6-2},$

feita de modos.

$$2 !$$

A terceira posição pode ser preenchida de $n - 2$ modos.

iii) Após distribuirmos as letras A, A, E e E, restam 4 posições. As letras restantes podem ser distribuídas A n -ésima posição pode ser preenchida de 1 modo.

de 4! modos.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos que o O número de anagramas é dado por:

número de grupos é igual a: $A_{8,2,6,2} = \frac{8!}{2! 6! 2!}$.

$n.(n - 1).(n - 2).(n - 3). \dots .1$, ou seja, $n! = 4! = 24$

$$2! 2! 6 2 ! ! 4 2 ! ! 2 2 ! !$$

Editora Bernoulli 9

Frente A Módulo 08

Generalizando, temos: **EXERCÍCIOS DE
FIXAÇÃO**



$$P = \alpha \beta , , \dots , \theta \text{ n } 01. !$$

n (UFSM-RS) Para efetuar suas compras, o usuário $\alpha \beta ! . ! \dots . ! \theta$ que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve

Em que realizar duas operações: digitar uma senha composta de $\alpha , b , \dots , q$ indicam o número de repetições de

cada elemento do conjunto. 6 Algarismos distintos e outra composta de 3 letras,

No exemplo, temos $P_{8,2} = 10\,080$ anagramas. 8 2 2 8 !
escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa = esqueceu a
senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos

2 2 !. ! três primeiros algarismos, e que as letras são todas vogais

distintas, sendo E a primeira delas, o número **MÁXIMO** de

PERMUTAÇÃO CIRCULAR tentativas
necessárias para acessar sua conta será

A) 210 B) 230 C) 2 520 D) 3 360 E) 15 120

de elementos dispostos em torno de um círculo. Duas
PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se distribuições
são consideradas idênticas quando uma delas
Chamamos de permutações circulares as permutações

02. (UNIFESP–2006) As permutações das letras da palavra

pode ser obtida a partir da outra, mediante uma
rotação palavra nessa lista é fossem palavras de cinco letras em um
dicionário. A 73ª simples. Observe o problema a seguir:

A) PROVA. D) ROVAP.

De quantos modos podemos distribuir três objetos
B) VAPOR. E) RAOPV.

a, b e c em torno de um círculo? C) RAPOV.

Considere as seguintes configurações: abc **03.**

(UFMG) Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco bca

cab

a vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas b c

vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se

formar uma fila com essas pessoas de forma que as três

C primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as b a
c b a

seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas

acb cba bac três primeiras. Nessa situação, de quantas
maneiras

a c b distintas se pode fazer tal fila?

A) $3 \cdot (5!)_3$ C) $(5!)_3 \cdot (3!)$

b B) $(5!)_3$ 15 ! c a b c a D)

3 5 ! !

de distribuir A princípio, podemos pensar que temos $P = 3! = 6$ modos 04. (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco a , b e c . No entanto, em cada uma das linhas podem se posicionar na fila única dos caixas de modo do esquema anterior há três configurações idênticas. Cada que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas? uma das figuras de uma linha pode ser obtida a partir das A) $4! \cdot 7!$ D) $10 \cdot 6!$ demais figuras da mesma linha com uma rotação simples. Porém, cada configuração em uma linha não pode ser obtida B) $5! \cdot 6!$ E) $4! + 10!$ a partir de uma rotação simples de uma configuração da C) $6 \cdot 6!$

outra linha. P 05. (UFSM-RS) De quantas maneiras distintas podem-se 3

Desse modo, temos apenas $3! = 6$ permutações
alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e 1 6

3 3 3

uma
branca?

circulares. Observe que dividimos o total de
permutações

por 3, pois cada uma das permutações consideradas
gera A) 12 B) 30 C) 42 D) 240 E) 5 040

3 configurações idênticas, que devem contar como
uma.

De maneira geral, podemos considerar que, ao
permutar

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

circularmente n objetos distintos, cada uma das $n!$
permutações gera 01. (UFJF-MG) Podemos ordenar as pessoas
que estão numa n configurações idênticas, que devem

ser “descontadas” do total. Fazemos isso dividindo $n!$
por certa fila de 24 maneiras diferentes. Então, nessa fila estão n .

PC $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ A) 4

pessoas. D) 12 pessoas. $\Rightarrow n = 24$ B) 5 pessoas. E)
24 pessoas.

PC $= (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$ C) 6 pessoas.
n



PC **02.** (Mackenzie-SP) O número de filas diferentes que podem $n = (n - 1)!$

ser formadas com 2 homens e 3 mulheres, de modo que

Em que PC os homens não fiquem juntos, é o número de permutações circulares de n

n objetos distintos. A) 96 B) 72 C) 48 D) 84 E) 120

10 Coleção Estudo

Permutações

03. (VUNESP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão **11.** (UFMG) Considere formados e dispostos em ordem

ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na crescente todos os números que se obtêm permutando

mesma fila. O número de maneiras em que os quatro os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. O número 75 391 ocupa,

podem ficar dispostos de modo que Pedro e Luísa fiquem nessa disposição, o lugar

sempre juntos, e João e Rita fiquem sempre juntos é A) 21° B) 64° C) 88° D) 92° E) 120°

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

12. (UFOP-MG) De quantas maneiras diferentes, oito crianças

04. (UEL-PR) Usando uma vez a letra **A**, uma vez a letra **B** podem ser dispostas ao redor de um círculo em uma

e $n - 2$ vezes a letra **C**, podemos formar 20 anagramas brincadeira de roda?

diferentes com **n** letras em cada anagrama. O valor de **n** é

A) 8! B) 7! C) 8 D) 7 E) 16

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13. (UnB-DF) Em um tabuleiro quadrado, de 5×5 , mostrado

05. (ITA-SP) Quantos anagramas da palavra CADERNO na figura I, deseja-se ir do quadrado esquerdo superior

apresentam as vogais na ordem alfabética? (ES) ao quadrado direito inferior (DI). Somente são

A) 2 520 D) 840 permitidos os movimentos horizontal (**H**), vertical (**V**) e

B) 5 040 E) 680 diagonal (**D**), conforme ilustrado na figura II.

C) 1 625

(H)

06. (UFMG) Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. ES

Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, (V)

que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a

programação, eles decidem que três desses filmes,

que são de ficção científica, devem ser exibidos em (D)

dias consecutivos. Nesse caso, o número de maneiras DI

diferentes de se fazer a programação dessa semana é Figura I Figura II

A) 144 B) 576 C) 720 D) 1 040 Com base nessa situação e com o auxílio dos princípios

07. de análise combinatória, julgue os itens que se seguem.

(UNESP) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo () Se forem utilizados somente movimentos horizontais e verticais, então o número de percursos possíveis

que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre

MATEMÁTICA

será igual a 70.

tenha exatamente uma cadeira vazia é

() Se forem utilizados movimentos horizontais e verticais

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

e apenas um movimento diagonal, o número de

08. percursos possíveis será igual a 140. (FGV-SP) De quantas formas podemos permutar as letras

da palavra ELOGIAR de modo que as letras () Utilizando movimentos horizontais, verticais e três **A** e **R** fiquem

movimentos diagonais, o número de percursos

juntas em qualquer ordem?

possíveis é igual a 10.

A) 360 D) 1 440

B) 720 E) 1 800 **14.** (UFJF-MG) Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de

C) 1 080 Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de

maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros

09. (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda em uma estante, de forma que os livros de mesmo

a sexta-feira, estas cinco atividades: assunto permaneçam juntos, é

I. Leva seu neto Pedrinho, às 13 horas, para a escola;

A) 288 C) 864

II. Pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;

B) 296 D) 1 728

III. Passeia com o cachorro da família;

IV. Pega seu neto Pedrinho, às 17 horas, na escola;

15. (UFRJ–2007) Um sítio da Internet gera uma senha de

V. Rega as plantas do jardim de sua casa. 6 caracteres para cada usuário, alternando letras e

Cansado, porém, de fazer essas atividades sempre na algarismos. A senha é gerada de acordo com as seguintes

mesma ordem, ele resolveu que, a cada dia, vai realizá-las regras:

em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de

maneiras i) Não há repetição de caracteres; **POSSÍVEIS** de ele realizar essas cinco

atividades, em ordem diferente, é ii) Começa-se sempre por uma letra;

A) 24 B) 60 C) 72 D) 120 iii) O algarismo que segue uma vogal corresponde a um

10. número primo; (ITA-SP) Quantos números de seis algarismos distintos

podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, iv) O algarismo que segue uma consoante corresponde

nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, a um número par.

mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes? Quantas senhas

podem ser geradas de forma que as três

A) 144 B) 180 C) 240 D) 288 E) 360 letras sejam **A**, **M** e **R**, em qualquer ordem?

Editora Bernoulli **11**

Frente A Módulo 08

16. (UFJF-MG) Um vagão de metrô tem 8 bancos individuais, **02.** A fim de aumentar a competitividade, as empresas

sendo 4 de frente e 4 de costas. De 8 passageiros, necessitam aprimorar suas técnicas de gerenciamento

3 preferem sentar de frente, 2 preferem sentar de de recursos, equipamentos e informações. Tais técnicas

costas e os demais não têm preferência. De quantos são chamadas de Logística e são fundamentais para

modos 8 passageiros podem se sentar, respeitando-se operações de carga e descarga em larga escala, como

as preferências? no porto ilustrado na figura a seguir:



17. (UFMG) Observe a figura.

10 C

9

B

8

7

6

5

4 Disponível em:

foto/0,,15366097> . Acesso em: 10 set. 2010.

3

Considere que a administração do porto da figura pretende

2

alocar 5 contêiners contendo minério de ferro (tipo A),

1

3 contêiners contendo produtos eletrônicos (tipo B)

A e 4 contêiners contendo peças automotivas (tipo C). 1

2 3 4 5 6 7 8 9 10

Cada contêiner possui um número de identificação

Considere os caminhos ligando A a C, passando por B, diferente. Um determinado setor do navio tem capacidade

traçados a partir de A, deslocando-se sempre, ou para 6 contêiners, e deve ser preenchido, obrigatoriamente,

1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade com dois

contêiners de cada tipo. O total de maneiras de

para cima, na vertical. **DETERMINE** o número total de se colocar os contêiners nesse setor, em fila, de modo que

caminhos distintos obtidos dessa forma. contêiners do mesmo tipo permaneçam juntos, é igual a

A) 8 640 D) 5 320 B) 7 240 E) 4 600

SEÇÃO ENEM C) 6 280

01. GABARITO O cerimonial de um evento deve acomodar quatro

delegações participantes em um auditório. Sabe-se **Fixação**
que o evento contará com a participação de

5 representantes de Minas Gerais, 4 representantes 01. E 02. E 03. C
04. A 05. C

de São Paulo, 7 representantes do Rio de Janeiro

Propostos

e 6 representantes do Ceará. Para acomodar os

participantes, o cerimonial separou 22 poltronas em uma 01. A 10.
A

das fileiras do auditório, cada uma marcada com o nome 02. B 11. C

do respectivo participante. Porém, os representantes 03. C 12. B

do Ceará e de São Paulo desejam sentar-se juntos, 04. C 13. V V F
enquanto as demais delegações não fizeram tal

05. D 14. D

exigência. O total de maneiras de o cerimonial posicionar

06. C 15. 432

os participantes na fileira, atendendo às condições

apresentadas, é dado por 07. D 16. 1 728

08. D 17. 2 025

A) 14!.6!.4!

09.
B

B) 22!.6!.4!

C) 5!.7!.6!.4! **Seção Enem**

D) 10!.6!.4! 01. A 02. A

E) 15!.12!.4!

12 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Prismas 07 B

DEFINIÇÃO CLASSIFICAÇÃO

Prisma é todo poliedro convexo construído tomando-se Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são

dois polígonos congruentes situados em planos paralelos e perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto,

unindo-se os pontos desses polígonos através de segmentos as faces laterais são retângulos. paralelos.

Na figura a seguir, temos um prisma cujas bases são os

pentágonos congruentes ABCDE e FGHIJ. Os paralelogramos

que unem as duas bases do prisma são denominados faces

laterais.

Base Vértice

J I

F H Prisma pentagonal reto

G

Face lateral Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos Aresta lateral

planos
das
bases.

E D

A C

B

Aresta da base

Podemos, então, identificar no prisma mostrado os seguintes elementos:

i) Prisma pentagonal oblíquo Bases: faces ABCDE e FGHIJ

ii) Arestas da base: (AB, BC, CD, DE, EA) e (FG, GH, Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos

HI, IJ, JF) regulares.

iii) Faces laterais: paralelogramos BCHG, CDIH, DEJI,

EAFJ, ABGF

iv) **SECÇÕES** Arestas laterais: CH, DI, EJ, AF, BG

A altura de um prisma é a distância **h** entre os planos Secção de um prisma é a interseção do prisma com um

das bases. plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos

que a secção de um prisma é um polígono com vértice em

cada
aresta
lateral.

h Secção reta ou secção normal é uma secção cujo plano é

perpendicular às arestas laterais.

α

NOMENCLATURA

Um prisma será chamado triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um Secção reta quadrilátero, um pentágono, etc.

Editora Bernoulli 13

Frente B Módulo 07

Secção transversal é uma secção cujo plano é paralelo Paralelogramo

às bases.

Secção
transversal

Retângulo

Paralelepípedo (reto)

Paralelepípedo reto retângulo ou paralelepípedo
retângulo,

ÁREAS ou ortoedro, é um prisma reto cujas bases
são retângulos.

A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a
reunião

Área lateral (A_l) é a soma das áreas das faces laterais.
D' de seis retângulos. C'

Área total é a soma da área lateral com as áreas
das bases.

B' c c



$$A_d D a = A A'$$

$$T_{1B} + 2.A C$$

f

b

VOLUME A a B

base
(face)

O volume de um prisma é o produto da área da base pela A D D'

medida da altura. d

f a c



$$V = A \cdot h_B \quad B \quad C \quad B \quad D \quad b \quad f$$

Pode-se demonstrar também que o volume de um prisma

é o produto da área da secção reta pela medida da aresta. A) Cálculo da diagonal d



No triângulo BCD, temos $f_2 = a_2 + b_2$.

$$V = S \cdot a$$

No triângulo BDD', temos $d_2 = f_2 + c_2 \Rightarrow d_2 = a_2 + b_2$

$$+ c_2 \Rightarrow$$



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

a

B) Cálculo da área total S

S

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles (ABCD, A'B'C'D') com dimensões

a e b, outros dois (ABB'A', DCC'D') com dimensões a e c e os últimos dois (ADD'A', BCC'B') com dimensões b e c.

Logo:

$$\text{PARALELEPÍPEDOS } S = 2ab + 2ac + 2bc$$

$\Rightarrow$



Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos.

A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis $S = 2(ab + ac + bc)$ paralelogramos.

C) Cálculo do volume V

O volume de um prisma, como sabemos, é o produto da

área da base pela altura, ou seja, $V = A \cdot h_B$

Paralelepípedo (oblíquo) Assim, para o paralelepípedo retângulo, temos:

paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são $A = a \cdot b$ e $h = c_B$ Então:



é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) e de dois $V = a \cdot b \cdot c$ paralelogramos (bases).

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas

01. (UFRGS–2006) Na figura a seguir, está representada a

são congruentes. planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual

D' C' à aresta da base. Se a altura do prisma é 2, seu volume é

A' B'

a a d

a C D

f a

A a B

base (face) A) $4\sqrt{3}$ D) $10\sqrt{3}$

D C D' B) $6\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

C)
8
 $\sqrt{3}$

a d a f **02.** (UFOP-MG–2009) Maíra adora brincar na piscina da

casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de

A a B D f B

comprimento. A parte rasa tem 0,5 m de profundidade,

Dado um cubo de aresta a e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina a , calculemos sua diagonal d ,

sua área total é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de S e seu volume V .

água necessária para enchê-la é

A) Cálculo da diagonal d A) $6\ 000$ C) $9\ 000$
B) $8\ 000$ D) $10\ 000$

No triângulo BAD , temos $f = a_2 + a_2$ (FUVEST-SP-2007)

O cubo de vértices $ABCDEFGH$, 2 **MATEMÁTICA**

Inicialmente, calculemos a medida f de uma diagonal de face. $\Rightarrow$ **03.** $f_2 = 2a_2 \Rightarrow f = a^1 2$.
indicado na figura, tem arestas de comprimento

No triângulo BDD' , temos $d = a_2 + f_2 \Rightarrow d_2 = a_2 + 2a_2 \Rightarrow 2 a$.

$$d_2 = 3a_2 \text{ H G } \Rightarrow$$



$$d = a^1 3$$

F
E
C

B) Cálculo da área total S_D

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados

congruentes de lado a . A área de cada um é a^2 .
Então, a área

total do cubo é: Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta AE , então

a distância do ponto M ao centro do quadrado $ABCD$ é igual a

a



$$S = 6a^2$$

$$a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 6a^2$$

a^2
 3

C) Cálculo do volume V_C

No cubo de aresta **04**. (UFMG) Um reservatório cúbico de 50 cm de profundidade a , temos:

está com água até a metade e precisa ser totalmente

$A = a \cdot a$ e $h = a$ esvaziado. O volume de água a ser retirado desse

Então: reservatório é de



A) 62,5 litros. C) 250 litros.

$$V = a^3$$

B) 125 litros. D) 25 litros.

Editora Bernoulli 15

Frente B Módulo 07

05. (VUNESP) As arestas do cubo ABCDEFGH, representado **05.**
(PUC Minas–2006) Em um reservatório cúbico, enquanto

pela figura, medem 1 cm. Se **M**, **N**, **P** e **Q** são os pontos o nível de
água varia de 8,0 cm para 10,4 cm, o volume

médios das arestas a que pertencem, então o volume do de água
aumenta de 143,2 litros para 179,0 litros. Com

prisma DMNCHPQG é base nesses dados, é **CORRETO** afirmar que,
com um

A M B acréscimo de 2,4 cm no nível da água, o volume de água

tem um aumento percentual igual a

C N A) 18%.

D

B)
20%.

E P C) 25%. F

D)
30%.

H G **06.** (UFMG) Dona Margarida comprou terra adubada

A) 0,625 cm³. D) 0,825 cm³. para sua nova jardineira, que tem a forma de um

B) 0,725 cm³. E) 0,845 cm³. paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas

C) 0,745 cm³ são: 1 m de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de .

altura. Sabe-se que 1 kg de terra ocupa um volume de

1,7 dm³. Nesse caso, para encher totalmente a jardineira,

EXERCÍCIOS PROPOSTOS a quantidade de terra que Dona Margarida deverá

utilizar é, aproximadamente,

01. (UFMG–2008) Considere um reservatório, em forma de A) 85,0 kg.

paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de B) 8,50 kg.

comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. C) 29,4 kg.

Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente D) 294,1 kg.

vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas

informações, é **CORRETO** afirmar que, para se encher **07.** (UFJF-MG) Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo

completamente esse reservatório, serão necessários retângulo. O volume da caixa será duplicado se

A) 40 min. C) 400 min. A) dobrarmos todas as suas dimensões.

B) 240 min. D) 480 min. B) triplicarmos todas as suas dimensões.

02. C) dobrarmos duas das suas dimensões, mantendo-se

(UFMG) A capacidade de um reservatório em forma de

a terceira dimensão inalterada.

um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são 50 cm,

D) triplicarmos sua altura, mantendo-se as duas outras

2 m e 3 m, é, em litros,

dimensões inalteradas.

A) 3 D) 3 000

E) dobrarmos uma de suas dimensões, mantendo-se as

B) 30 E) 30 000 outras duas dimensões inalteradas.

C) 300

08. (Cesgranrio) Na figura, cada aresta do cubo mede 3 cm.

03. (FUVEST-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, Prolongando-se uma delas de 5 cm, obtemos o ponto **M**.

com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos A distância, em centímetros, de **M** ao vértice **A** é

à fusão e, em seguida, o alumínio líquido é moldado como

um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e 3 cm 5 cm x cm. **M**

O valor de **x** é

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

04. (UFV-MG) Um recipiente, contendo água, tem a forma

de um paralelepípedo retangular e mede 1,20 m de A

comprimento, 0,50 m de largura e 2,00 m de altura.

Uma pedra de forma irregular é colocada no recipiente, A) 2^{121}

ficando totalmente coberta pela água. Observa-se, então, B) 182

que o nível da água sobe 1 m. Assim, é C) 8 **CORRETO** concluir 13

que o volume da pedra, em m^3 , é D) 8^{12}

A) 0,06 B) 0,6 C) 6 D) 60 E) 600 E) 9

16 Coleção Estudo

Prismas

09. (VUNESP) As faces de um paralelepípedo retangular **13.**

(FUVEST-SP) Na figura a seguir, **I** e **J** são os centros das

têm por área 6 cm^2 , 9 cm^2 e 24 cm^2 . O volume desse faces EFGH e BCGF do cubo ABCDEFGH de aresta **a**.

paralelepípedo é Os comprimentos dos segmentos AI e IJ são,

A) $1\ 296\text{ cm}^3$. respectivamente,

B) 48 cm^3 . H G

C) 39 cm^3 .

I

D) 36 cm^3 E . F

E) 6^{16} cm^3 . J

D

10. C (PUC-SP) Um tanque de uso industrial tem a forma de

um prisma, cuja base é um trapézio isósceles. Na figura

a seguir, são dadas as dimensões, em metros, do prisma.

A) , a^1 a 66 D) a^16 , a^12

8 2

a 6 a 2 a

B) , E) $2a$,

2 2 2

5 5 a 2 C) $a^1 6$, 2 2

14. (VUNESP) Uma caixa-d'água, com a forma de um

O volume desse tanque, em metros cúbicos, é

A) 50 paralelepípedo reto de 1 m x 1 m de base e m 3

2

B) 60 de altura, está sobre uma laje horizontal com água

C) 80 até a altura **h**. Suponhamos que a caixa fosse erguida

D) 100 lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base

E) 120 (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim, a água

MATEMÁTICA

começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da

11. base da caixa com a laje medisse 30° . **CALCULE** a altura **h**.

(Unicamp-SP) Ao serem tirados 128 litros de água de

uma caixa-d'água de forma cúbica, o nível da água

baixa **15.** (Unicamp-SP) A figura a seguir é a planificação de uma

20 centímetros.

caixa sem tampa.

A) **CALCULE** o comprimento das arestas da referida caixa. x

B) 5 **CALCULE** sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

X

12. (UFU-MG) Considere uma cruz formada por 6 cubos idênticos e justapostos, como na figura adiante. Sabendo-se que a área total da cruz é de 416 cm^2 , pode-se afirmar x $2x$ que o volume de cada cubo é igual a 5

A) **ENCONTRE** o valor de x , em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

B) Se o material utilizado custa R\$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros, considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

16. (FGV-SP-2006) Antes que fosse reparado um vazamento em uma piscina retangular, com 20 m de comprimento e 10 m de largura, ocorreu uma perda de 20 000 litros de

A) 16 cm^3 . água, fazendo com que o nível de água baixasse em

B) 64 cm^3 . A) 1 m. D) 0,2 m.

C) 69 cm^3 . B) 0,5 m. E) 0,01 m.

D) 26 cm³. C) 0,1 m.

Editora Bernoulli 17

Frente B Módulo 07

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2010) Uma fábrica produz barras de chocolates

no formato de paralelepípedos e de cubos, com o

01. (Enem–2003) Prevenindo-se contra o período anual de mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no

seca, um agricultor pretende construir um reservatório formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18

fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando

que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período as características das figuras geométricas descritas, a

anual chuvoso. As ilustrações a seguir apresentam as medida das arestas dos chocolates que têm o formato

dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva de cubo é igual a

na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser A) 5 cm.
D) 24 cm.

construído. B) 6 cm. E) 25 cm.

(mm)

C)
12
cm.

04. (Enem–2010) Um porta-lápis de madeira foi construído

8 m 10 m 200 no formato cúbico, seguindo o modelo
ilustrado a seguir.

2 m x 4 m x p m **p** 100 O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede m 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm. 4 m 2 m l t v n v Reservatório Ju Jan Fe Mar Abr Mai Ju Se Ago Out No Dez

Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao
acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana
horizontal de um metro quadrado, a profundidade **p** do
reservatório deverá medir

A) 4 m. B) 5 m. C) 6 m. D) 7 m. E) 8 m.

O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto

02. foi de (Enem–2006) Eclusa é um canal que, construído em

águas de um rio com grande desnível, possibilita a A) 12 cm³. D) 1 216 cm³.

navegabilidade, subida ou descida de embarcações. B) 64 cm³. E) 1 728 cm³.

No esquema a seguir, está representada a descida de C) 96 cm³.

uma embarcação, pela eclusa do Porto Primavera, do nível



mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.

GABARITO

Nível da O P O R 20 m R T 01. E 02. C 03. C 04. A 05. A jusante T

Câmara A A P **Fixação**

² Propostos _{6 m 1}

Válvula de dreno Válvula de enchimento 01. C 10. D

Câmara Enquanto a válvula de enchimento está fechada
e a de dreno, aberta, 02. D 11. A) $a = 8 \text{ dm}$

o fluxo de água ocorre no sentido

indicado pelas setas, esvaziando a 03. D B)
 $V = 512 \text{ litros}$

câmara até o nível da jusante. 04. B 12. B
Quando, no interior da câmara, a água
atinge o nível da jusante, 05. C 13. B a
porta 2 é aberta, e a embarcação

pode continuar navegando rio 3 06. C 14.
metros abaixo. 3

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 07. E 15.
A) 50 cm

200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da 08. B B) R\$
8,40

água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m³

por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o 09. D 16. C

A) 2 minutos. Seção Enem D) 16 minutos.
nível da jusante, uma embarcação leva cerca de

B) 5 minutos. E) 21 minutos. 01. D 02. D 03. B 04. D

C) 11 minutos.

18 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Pirâmides 08 B

DEFINIÇÃO NOMENCLATURA

Pirâmide é todo poliedro convexo construído
unindo-se os Uma pirâmide será triangular,
quadrangular, pentagonal,

vértices de um polígono qualquer (base da pirâmide) a um etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero,

mesmo ponto (vértice da pirâmide) situado fora do plano um pentágono, etc. desse polígono.

Na figura a seguir, temos uma pirâmide de base

ABCDEF PIRÂMIDE REGULAR

e vértice V. Com exceção da base, as demais faces são formadas por um lado da base e pelo vértice da pirâmide. Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono

São sempre triângulos e denominadas faces laterais. regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da

vértice da pirâmide base é o centro da base. Numa pirâmide regular, as arestas

V

laterais são congruentes, e as faces laterais são triângulos

isósceles
congruentes

Chama-se apótema de uma pirâmide regular a altura

aresta lateral face lateral

(relativa ao lado da base) de uma face lateral.



E (apótema da pirâmide) D

F C

aresta da base h

A B



Podemos, então, identificar, na pirâmide mostrada,



os seguintes elementos:



i) Base: face ABCDEF Pirâmide regular hexagonal

ii) Arestas da base: AB, BC, CD, DE, EF e FA



iii) Faces laterais: os triângulos BCV, CDV, DEV, EFV, FAV **TETRAEDRO** e ABV



iv) Arestas laterais: CV, DV, EV, FV, AV e BV
 Tetraedro é uma pirâmide triangular.



A altura de uma pirâmide é a distância **h** entre o vértice
 Tetraedro regular é um tetraedro que possui as seis arestas

e o plano da base. congruentes entre si.

h

α Tetraedro

Editora Bernoulli 19

Frente B Módulo 08

RELAÇÕES NUMA PIRÂMIDE VOLUME

REGULAR Sejam A a área da base e h a altura de uma pirâmide _B

qualquer. O volume V dessa pirâmide é dado por:

Considere a pirâmide quadrangular regular
 VABCD:

V

h

L

$$h \text{ a}_p A_B \text{ 1 } V = .A_B.h \text{ 3}$$

D

A R O a

_B C EXERCÍCIO RESOLVIDO

M

B

Em que: **01.** De um tetraedro regular de aresta **a**, calcular

lateral); $VM = a$ é o apótema da pirâmide regular
(altura da face $_p A$) a área total $A \cdot T$

$OM = a$ B) a medida **h** da altura. é o apótema da base;

B

$OA = C$) o seu volume **v**. **R** é o raio da circunferência
circunscrita à base;

$VA = L$ é a aresta lateral da pirâmide;

Resolução

$VO = h$ é a altura da pirâmide.

Dos triângulos sombreados na figura anterior,
tiramos Tetraedro Base do tetraedro

as seguintes relações, válidas para toda pirâmide regular: A B

$$V V 2 a^3 a^3 = a^3 2 3 h a^3 a^2 D G$$

B
G

$$h a h_p L C C a D$$

A)
Área
total:

$$O_B M A R O A = 4A \Rightarrow A = 4 \dots a = a_{2TB T} \parallel \parallel \Rightarrow A_T^1 3 \left(a \left(\right. \right. 1 a 3 2 2 \left. \right) \left. \right)$$



$$a_{2p} = h_2 + a_B L_2 = h_2 + R_2 B) \text{ Cálculo da altura:}$$



Do triângulo AGB, temos:

ÁREAS LATERAL E TOTAL $\left(\right) h_2 = a_2 -$
 $(BG)_2 \Rightarrow h_2 = a_2 a_3 - \parallel \parallel \Rightarrow$ Para uma pirâmide qualquer,
 a área lateral corresponde à $\left(3 \right)$

soma das áreas de todas as faces laterais. $a_2 a_3 h_2 a_6 = \Rightarrow$
 $h =$ Como em uma pirâmide regular as faces laterais
 são 9 3 triângulos isósceles congruentes, para
 calcularmos a área

lateral, fazemos a área de uma face lateral
 multiplicada pelo C) Volume: número de faces laterais.

$$1_2 a_3 a_6$$

lateral com a área da base: 3 4 3 A área total de uma
 pirâmide corresponde à soma da área $V = .A_B.h$, em que
 $A_B = e h =$. Então:



$$A_T = A + A_V = 1_2 3 a_3 a_6 a_2 1 \dots \Rightarrow V = B$$



$$3 \ 4 \ 3 \ 12$$

SECÇÃO DE UMA PIRÂMIDE POR VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

UM PLANO PARALELO À BASE

Dadas a área A da base maior, a área a da base menor
 $B B$

e h a medida da altura do tronco, o volume do tronco
da

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano
paralelo a pirâmide pode ser obtido por meio da
fórmula:

à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos.

O sólido que contém o vértice é uma nova pirâmide,
e o sólido que contém a base da pirâmide é um tronco
de

pirâmide de bases paralelas. a_B

$$V_h V_T V_h V_{A_T} = \left[\left| A + A \cdot a + a_{B B B} \right| 3_{B B} \right]$$

D' D'

A' A'

C' C'



B' B' EXERCÍCIO RESOLVIDO D D

A A

C C

B B **02.** (UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m^2

A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm bases de área. A 4 m do vértice, traça-se um plano paralelo

semelhantes, e os elementos lineares homólogos (arestas à base, e a secção assim feita tem 64 m^2 de área. Qual a

das bases, arestas laterais, alturas, etc.) são proporcionais. altura da pirâmide? Assim, dizemos que elas são semelhantes. *Resolução:*

V

Razão de semelhança 4 m a = 64 m^2 B $A_B = 144$
 m^2

Dadas duas pirâmides semelhantes, a razão entre dois

$$a_B D' C' H$$

semelhança. Essa razão será representada por $D \cdot k$.
 elementos lineares homólogos é denominada razão de

$A' B'$ **MATEMÁTICA**

$$A_B$$

$$h$$

$$A B$$

ℓ a H_B Fazendo semelhança entre as pirâmides $VABCD$ e



$VA'B'C'D'$, temos:

$$A_{kHL} = =$$

$$h_{22} H \mid 144 \mid H \mid 12 H$$

$$L_B \mid A \mid$$

$$_B = \mid \mid \Leftrightarrow = \mid \mid \Leftrightarrow = \Rightarrow H = 6 \text{ m}$$

$$a h 64 4 4_B \mid \mid \mid 8$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = k^2$$

01. (UFMG) Observe a figura.

Para razões entre volumes das pirâmides semelhantes, B

em que V e v são os volumes das pirâmides grande e A pequena, respectivamente, temos:

C



$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3 = k^3$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3 = k^3$$

Essa figura representa um prisma reto de base triangular.

Podemos, então, generalizar da seguinte maneira: o plano que contém os vértices **B**, **D** e **F** divide esse

i) prisma em dois sólidos: **DACFB**, de volume V_1 , e **DEFB**, de volume V_2 . A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois



sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre as áreas homólogas. Assim, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é de semelhança $\frac{A_1}{A_2}$.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão entre as áreas homólogas. Assim, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é de semelhança $\frac{A_1}{A_2}$.

Editora Bernoulli 21

Frente B Módulo 08

02. (UFSCar-SP) As bases **ABCD** e **ADGF** das pirâmides

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ABCD e **ADGF** são retângulos e estão em planos

perpendiculares. Sabe-se também que **ABCD** é uma

01. (FUVEST-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral

pirâmide regular de altura 3 cm e apótema lateral 5 cm, de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da

e que ADE é a face lateral comum às duas pirâmides. base mede 8 m, e a altura da pirâmide, 3 m. As telhas

G para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas

F

desperdiçadas (quebras e emendas), o número **MÍNIMO**

E

de lotes de telhas a ser comprado é

A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

D C

02. (UFES) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm.

A B Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo.

Se a aresta AF é 5% maior que a aresta AD, então o Podemos obter uma pirâmide tomando o quadrado

volume da pirâmide ADGFE, em cm³, é ABCD como base e A' como vértice. A área lateral dessa

A) 67,2 pirâmide mede B) 80 C) 89,6 D) 92,8 E) 96

A) $(1 + \sqrt{2})$ cm². D) $2(2 + \sqrt{2})$ cm².

03. (UFMG) Corta-se uma pirâmide regular de base B) $2(1 + \sqrt{2})$

cm². E) $(2 + \sqrt{2})$ cm².

quadrangular e altura 4 cm por um plano paralelo ao BC ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$) cm. plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos

obtidos sejam iguais. A altura do tronco de pirâmide

03. (Cesgranrio) Em um tetraedro $OABC$, os ângulos entre

obtido é, em centímetros,

as arestas que concorrem em O são todos iguais a 90° . Se $OA = 3$, $OB = 5$ e $OC = 12$, o comprimento da maior

aresta
do
tetraedro
é

25

A) 20 B) 15 C) 13 D) 12

2

04. (VUNESP) Em cada um dos vértices de um cubo de

A) 1 D) $4 - \frac{1}{2}$ **M** madeira, recorta-se uma pirâmide $AMNP$, em que N e P são os pontos médios das arestas, como se

B) $4 - \frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ E) $4 - \frac{2}{3}$ mostra na figura. Se V é o volume do cubo, o volume do

C) 2 poliedro que resta, ao retirar as 8 pirâmides, é igual a

04. (UFOP-MG-2009) Considere um prisma cuja base é um P

hexágono regular de lado l , e uma pirâmide cuja base é $M A$

um triângulo equilátero com lados medindo o triplo de l .

Se o volume do prisma é o dobro do volume da pirâmide,

N

a altura da pirâmide é

A) o quádruplo da altura do prisma.

B) o triplo da altura do prisma. 1 3 2 5 3

A) V B) V C) V D) V E) V

C) o dobro da altura do prisma. 2 4 3 6 8

D) igual à altura do prisma. **05.** (VUNESP) A figura a seguir mostra uma pirâmide regular

05. de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que

de base triangular ABC e vértice as arestas da base. Pelo ponto médio **M** da altura OQ, V (FUVEST-SP) A figura a seguir representa uma pirâmide

ABV são triângulos equiláteros de lado traça-se o segmento MN perpendicular à aresta OA. 1 . Sabe-se que ABC e

, e que **M** é o

ponto médio do segmento AB O . Se a medida do ângulo

VMC é 60° , então o volume da pirâmide é

A C D 60° A

M Q

B B C

A) 3 3 3 3 3 Se **a** expressa a medida de MN, **DETERMINE** o volume
 l 3 B) l 3 C) l 3 D) l 3 E) l 3 4 8 12 16 18 da pirâmide em função de **a** .

22 Coleção Estudo

Pirâmides

06. (UFG–2008) A figura a seguir representa uma torre, na **10.**
 (UFMG) Sabe-se que, no tetraedro da figura, $AB = 5$ m,

forma de uma pirâmide regular de base quadrada na qual $BD = 4$
 m, $AD = 3$ m e $\angle DAC = 60^\circ$. Se CD é perpendicular

foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, ao plano de
 ABD, então o volume do tetraedro, em m^3 , é

paralela à base. Se os lados da base e da plataforma

medem, respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da

torre, em metros, é

D

60°

A B

A) 6 ¹3 D) 18¹3

Plataforma B) 3 ¹3 E) 4¹3

C)

2

¹3

11. (FUVEST-SP) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a ¹2?

A) 75 A) 1 B) ¹1,5 C) ¹2 D) ¹2,5 E) ¹3 B) 90 C) 120 D) 135 E) 145

07. (UFSCar-SP) Os segmentos de reta que unem os pontos **12.** (UFSM-RS) Assinale a alternativa que apresenta a razão

centrais das faces adjacentes de um cubo determinam entre os volumes de um tetraedro regular e de um cubo

um octaedro (ver figura a seguir). cujas arestas são iguais.

4 3 1 2 2

A) B) C) D) E)

3 4 2 6 12

13. (UFMG) Nesta figura, estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide MABC, que

Se a aresta do cubo mede 1 cm, então

o volume do situa-se sobre o
 prolongamento da aresta BD do cubo.
MATEMÁTICA possui três vértices em comum com o
 cubo. O ponto **M**

octaedro é igual a Os segmentos MA e MC interceptam as arestas
 desse 3×3 l l A) cm^3 . D) cm^3 cubo, respectivamente, nos pontos **N** e **P** ,
 e o segmento . 8 7 ND mede 1 cm.

B) cm^3 . E) cm^3 M l 3×3 l

.

4 6

C) cm^3 D l 3×3 N .

5 P

08. (UFF-RJ–2006) Considere ABCDEFGH um cubo cuja aresta

mede 1 cm e A I um ponto no prolongamento da aresta B



AB, de tal modo que o volume do tetraedro ADFI tenha
 o mesmo volume do cubo ABCDEFGH. C

E H

F G Considerando-se essas informações, é **CORRETO** afirmar

que o volume da pirâmide MNPD é, em cm^3 ,

D A) B) C) D) 1 1 1 1 C

6 4 2 8

A B I

14. (UEL-PR) Considere uma pirâmide regular, de altura 25 m

DETERMINE a medida do segmento BI. e base quadrada de lado 10 m. Seccionando essa pirâmide

09. (Cesgranrio) Em um cubo de aresta 3 por um plano paralelo à base, à distância de 5 m desta, ¹ 6 , considere-se 3 obtém-se um tronco cujo volume, em m³, é o tetraedro VABC, como indicado na figura. O volume do

tetraedro é 200 1 220 1 280 V A) B) 500 C) D) E) 1 220

A) 2 3 3 3

B) ¹2 **15.** (UFRJ) Uma pirâmide regular tem base quadrada de

C) ³ ¹3 área 4. Ela é seccionada por um plano paralelo à base de C B 6 modo a formar um tronco de pirâmide de altura 2 e de D) 3 base superior de área 1. **DETERMINE** o valor da aresta

E) 1 A lateral do tronco da pirâmide.

Editora Bernoulli **23**

Frente B Módulo 08

SEÇÃO ENEM 03. (Enem-2010) Devido aos fortes ventos, uma empresa

exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança

01. (Enem-2009) Uma fábrica produz velas de parafina em de suas plataformas marítimas, colocando cabos de

forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de aço para melhor afixar a torre central. Considere que

altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma

por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide extremidade no ponto médio das arestas laterais da

de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra

espaçados 1 cm entre eles, sendo que a base superior no vértice da base da plataforma (que é um quadrado

de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, de lados paralelos aos lados da base da torre central e

com uma haste de ferro passando pelo centro de cada centro coincidente com o centro da base da pirâmide),

bloco, unindo-os, conforme a figura. como sugere a ilustração.

Torre central

Base da plataforma



6 m

6 m

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo,

retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de Se a altura e a aresta da base da torre central medem,

aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto respectivamente, 24 m e 6 ¹2 m e o lado da base da

ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela? plataforma mede 19¹2 m, então a medida, em metros,

A) 156 cm de cada cabo será igual a 3 D) 216 cm 3

B) 189 cm A) 3 E) 540 cm 3 ¹288

C) 192 cm 3 B) ¹313

02. C) ¹328 (Enem–2009) Um artesão construiu peças de artesanato

interceptando uma pirâmide de base quadrada com um D) ¹400

plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que E) ¹505

poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter

uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir

justifica a conclusão do artesão? **GABARITO**

A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais

**e a interseção de um plano
com a pirâmide intercepta**

Fixação suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um

polígono de 4 lados. 01. C 02. C 03. B 04. D 05. D

B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces **Propostos**

triangulares e, quando um plano intercepta essa

pirâmide, divide cada face em um triângulo e um 01. A 09.
E trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

02. A 10. A

C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a

interseção de uma face com um plano é um segmento 03. C
11. A de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces,
04. D 12. E o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

05. $8^1 3a_3$ 13. B

D) O número de lados de qualquer polígono obtido como

interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao 06. D
14. C número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem
3 2 07. E 15. 5 faces, o polígono tem 5 lados. 2

08.
5
cm

E) O número de lados de qualquer polígono obtido

interceptando-se uma
pirâmide por um plano é
igual Seção Enem ao número de arestas
laterais da pirâmide. Como

a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 01. B 02.
C 03. D 4 lados.

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Inequações 07 C

INTRODUÇÃO INEQUAÇÃO PRODUTO

Sabemos que uma inequação é uma relação caracterizada Chamamos de inequação produto a toda inequação na qual

pela presença dos seguintes sinais de desigualdade: $>$, $<$, o primeiro membro é formado por um produto de funções do

$\geq$ ou $\leq$. Vejamos alguns exemplos: primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo

1º) membro é nulo. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x - 3 > 18$.

Resolução: Exemplos

$$x - 3 > 18 \Rightarrow x > 21 \quad 1^\circ) (x - 2).(x - 3) \geq 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 21\} \quad 2^\circ) (x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$$

2º) $x + 4$ Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-2 \leq x < 8$. 3º)

$$(2x_2 - 5x).(2 + x - x_2) < 0 \quad 3$$

Resolução: Para resolvermos uma inequação produto, devemos

Multiplicando-se todos os termos da inequação por estudar o sinal de cada uma das funções que estão sendo

3, temos: multiplicadas. Em seguida, obtemos o resultado, analisando os sinais obtidos e utilizando o chamado **quadro de sinais**.

$$-6 \leq x + 4 < 24$$

Subtraindo-se -4 de todos os termos, temos:

Exemplos

$$-10 \leq x < 20 \quad 1^\circ) \text{ Resolver, em } , \text{ a inequação } (x - 2). \\ (x - 3) \geq 0.$$

$$S = \{x \in \mid -10 \leq x < 20\} \quad \textbf{Resolução:}$$

3º) Resolver, em , a inequação $x_2 - 5x + 6 > 0$.

Vamos denotar cada função por y e y e estudar o $_{1 \ 2}$

sinal de cada uma delas. **Resolução:**

Inicialmente, vamos calcular as raízes da função:

$$y_1 \ y_2 \ ! " \# \$ \# ! " \# \$ \#$$

$$x - 5x + 6 = 0$$

$$_2 (x - 2).(x - 3) \geq 0$$

Estudo do sinal

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x = 5 \quad 1 \quad y = x - 2 \quad 1 \quad \pm \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

Raiz: $x = 2$ Representando o gráfico, temos:

Sinal +

$$y > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3 \quad 2 \quad x - y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

$$\begin{array}{c} y \\ = \\ x \\ - \\ 3 \end{array}$$

+ + Raiz: $x = 3$

$$2 \quad 3 \quad x -$$

+

Portanto, o conjunto solução é dado por: $3 \quad x -$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

Editora Bernoulli 25

Frente C Módulo 07

Quadro de sinais 3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(2x_2 - 5x_1)(2 + x - x_2) < 0$.

2.3 Resolução:

$$y - + + y y_1 ! " \# \# \$! " \# \#_2 \# \# \$$$

$$_{122} (2x - 5x_1).(2 + x - x_2) < 0 \quad - - +$$

$$y_{22} y = 2x + - + - 5x_1$$

Como queremos saber em quais intervalos o y $y_{12} x_5$ Suas raízes são 0 e -2 produto é positivo ou igual a zero, temos: Estudo do sinal $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3\}$

OBSERVAÇÃO sinal

As inequações do 2º grau que possuam raízes reais y_{51}
 $> 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x >$

2

podem ser fatoradas e, portanto, transformadas
 em inequações produto. Nesse caso, podem ser $y_{51} < 0$
 $\Leftrightarrow 0 < x <$

resolvidas como descrito anteriormente. Por exemplo, a inequação $x_2 - 5x + 6 \geq 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ e resolvida com o uso do quadro

de sinais. + +

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$. **Resolução:**

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$$

Suas raízes são -1 e 2 .

Estudo do sinal

Estudo do sinal = $x - 1$

Raiz: $x = 1$

Sinal

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - 4x + 3) = (x - 1)(x - 1)(x - 3) = (x - 1)^2(x - 3)$$

Estudo do sinal do produto $f(x)$

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 3$$

$$-1 \quad 0 \quad 2 \quad 2$$

Quadro de sinais + + - - +

$$1 \ 3 - + + - -$$

$$y - y_2 + + - + - + -$$

$$_1 y \cdot y$$

$$+ \ 1 \ 2 - + x$$

$$y_2$$

Portanto, $S = \{x \mid y - - + \text{ Queremos saber para que valores de } x \text{ temos } y \cdot y < 0. \cdot y_{212} x \mid 5 \}$
 Portanto, $S = \{x \in \mid x < -1 \text{ ou } 0 < < x^2 \text{ ou } x > \} \cdot \mid 2 \in \mid x = 1 \text{ ou } x \geq 3 \} \cdot \mid$

26 Coleção Estudo

Inequações

INEQUAÇÃO QUOCIENTE 2º) $x_2 - 2x - 8$ Resolver, em , a inequação ≥ 0 . $x_2 - 6x + 9$

Chamamos de inequação quociente a toda inequação na qual **Resolução:**

o primeiro membro é formado por uma divisão envolvendo $y_1 ! " \# \#\# \$$ funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, $x_2 - 2x - 8 \geq 0$ e o

segundo membro é nulo. Convém ressaltar que, como $x_2 - 6x + 9 \neq 0$ se trata de uma divisão, devemos verificar suas condições de existência, ou seja, o denominador não pode ser nulo.

Temos:

Exemplos

$$1^\circ) x^2 - 2x + 1 \quad x_2 - 2x - 8 \leq 0 \quad 2^\circ) x_2 y = x_2 - 2x - 8, \text{ com raízes } -2 \text{ e } 4_1$$

$$-3x_2 y = x_2 - 6x + 9 \quad -6x + 9, \text{ com raiz dupla } 3_2$$

O procedimento para resolução é análogo ao adotado nas Condição de existência: $x \neq 3$

inequações produto. Estudo do sinal de y_1

Exemplos

$$1^\circ) x^2 - 2x + 1 \quad \text{Resolver, em } x, \text{ a inequação } y_1 \leq 0.$$

$$x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 4$$

Condição de existência: $x \neq 3$

$$y_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

$$! " \# _1 \# \$$$

$$x_2^2 - 2x + 1 \leq 0 \quad x - 3 \neq 0$$

$$y_2 + +$$

Estudo do sinal

$$y = x^2 - 2x + 1$$

MATEMÁTICA

Possui uma raiz dupla igual a 1.

Estudo do sinal de y_2

Sinal

$$+ y > 0 \quad x \neq 3 \Leftrightarrow +$$

$$1 \quad x$$

$$y = x - 3$$

Sua raiz é igual a 3.

$$+ \quad +$$

$$3 \quad x$$

$$+$$

- 3 x Quadro de sinais

$$-2 \quad 3 \quad 4$$

Quadro de sinais + - - +

$$y_1$$

$$1 \quad 3 \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$$y + y_2 + + + - - + y_{11} y - - + {}_2 x y_2$$

$y - - + {}_1 y$ Queremos saber para que valores de x temos ${}_1 \geq 0$. $y_2 x y_2$

Portanto, $S = \{x \in \mid x < 3\}$. $S = \{x \in \mid x \leq -2$
ou $x \geq 4\}$

Editora Bernoulli **27**

Frente C Módulo 07

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. $2x + 2$ **01.** (PUC Rio–2006) Quantos números inteiros satisfazem (UFMG) Considere a função $f(x) = . x - 3$ simultaneamente as desigualdades:

O conjunto dos valores de x para os quais

$$2x + 3 \leq x + 7 \leq 3x + 1$$

$f(x) \in \{y \in : 0 < y \leq 4\}$ é

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2 E) 5

A) $\{x \in \mid x \geq 7\}$

B) $\{x \in \mid x < -1$ ou $x \geq 7\}$ **02.** (UFMG) O conjunto solução da

inequação $-3x + a > 7$ é

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 7\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Então, o valor de a é

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ A) 1 D) 10

02. (UFG-2006) Duas empresas **A** e **B** comercializam o C) 7 B) 2 E) 13

mesmo produto. A relação entre o patrimônio y e o tempo

de atividade em anos $2x - 1$ x de cada empresa é representada, **03.** (UFOP-MG) O conjunto solução da inequação > 1 é x respectivamente, por: A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ A: $x - 2y + 6 = 0$ e B: $x - 3y + 15 = 0$ B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa **A** C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

será superior ao patrimônio da empresa **B** a partir de

quantos anos? D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

A) 3 E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$ D) 12

B) 5 E) 15 **04.** (FUVEST-SP) Um estacionamento cobra R\$ 6,00 pela

C) 9 primeira hora de uso, R\$ 3,00 por hora adicional e tem

03. $(-x^2 + x - 20)^3$ uma despesa diária de R\$ 320,00. Considere um dia em (UFPI) O conjunto solução da inequação < 0 25 que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. $x \times (-1)$

é o intervalo O número **MÍNIMO** de usuários necessário para que o

A) (1, estacionamento obtenha lucro nesse dia é ∞)

B) $(-A) 25$ D) $28 \infty, -1]$

C) $(-B) 26$ E) $29 \infty, 1)$

D) $[0, C) 27 \infty)$

E) $(-\infty, 0) 4x - 3$ **05.** (UFMG) O número real x satisfaz $>$

2. Assinale a $x + 1$ **04.** (UFJF-MG-2006) Os valores de x que satisfazem a alternativa em que estão incluídas todas as possibilidades

inequação $x^2 - 2x - 3$ para $x \geq 0$ pertencem a $x - 2$ 5 5 A) $-1 < x < C) x > 2$ 2 A) $[-1, 2) \cup [3, \infty)$

5

B) $(-1, 2] \cup (3, \infty)$ B) $x < -1$ ou $x > D) x < -1$

2

C) $[1, 3]$

D) $[-3, 2)$ **06.** (UFV-MG) Seja p um número real positivo menor que a

E) $[-3, -2]$ sua raiz quadrada. Sobre a inequação $(p - 1)x < p - 1$, $\cup (2, \infty)$

em , é **CORRETO** afirmar que

05. x A) $0 < x < p$ D) $x > 1 + 4$ (Umesp) A função $f(x) = 3x$

tem como domínio, no

2 B) $p < x < 1$ E) $0 \leq x \leq 1$

$4 - x$

campo dos reais, os valores de x que se encontram na C) $x < 1$

alternativa 2 $x + x - 1$ 1 **07.** (UFSM-RS) O conjunto solução da inequação $\geq A) - \{4\} 9 - x_2 3 - x$

B) $x < -4$ ou $x \geq 0$ é dado por

C) $0 \leq x < 4$ A) $[-3, 3[$ D) $[-2, 2]$

D) $0 \leq x < 2$ B) $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$ E) $[2, \infty[$

E) $0 < x < 2$ C) $]-3, -2] \cup [2, 3[$

28 Coleção Estudo

Inequações

08. (PUC Minas) O polinômio $p(x) = (m + 2)x^2 + 2(m - 3)x + m^2$

13. (UFRGS) Os gráficos seguintes representam,

é negativo para $x = 1$. Nesse caso, o **MAIOR** valor inteiro respectivamente, as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

de **m** é Essas funções se anulam somente nos pontos indicados

A) 0 nas figuras.

y

B) -1

C) -2

D) -3

-3 0 2 x

09. (PUC Minas) O conjunto dos valores de x para os quais y

os pontos do gráfico de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ estão acima

do eixo das abscissas é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 5\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 5\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{A solução da inequação } f(x) \cdot g(x) > 0 \text{ é } -1 < x < 5\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid (-\infty, 0) \cup (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$

B) $(0, +\infty)$ E) $(-3, 0) \cup (0, 2)$

10. (UNESP) Todos os **POSSÍVEIS** valores de **m** que C) $(-3, 2)$

satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo

x 14. (UERJ) Sabe-se que o polinômio $p(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$ pertencente ao conjunto dos reais, são dados por

A) $m > 10$ pode ser decomposto na forma $p(x) = (2x + 1)(-x^2 + 2)$.

Representando as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2$,

B) $m > 25$

num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, obtém-se

C) $m > 30$

o gráfico a seguir:

D) $m < 5$

y

E) $m < 30$

f **MATEMÁTICA**

11. (UFV-MG) Sejam as funções reais **f** e **g** dadas por

$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = x^2 + 4x + 8$$

; o domínio da função $f \circ g$ é

$$3(x - 1) \leq 3(x + 2) \leq 12$$

1 O x

composta $f \circ g$ é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq 1\}$ Tendo por base apenas o gráfico, é possível resolver a

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ inequação $-2x^3 - x^2 + 4x + 2 < 0$. Todos os valores de x

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$ que satisfazem a essa inequação estão indicados na

seguinte alternativa:

12. (UFF-RJ) No triângulo retângulo representado a seguir, cada um dos catetos mede 3 cm.

B) $x < -1$ ou $x > 1$ D) $-1 < x < 1$ ou $x > 1$

E 2

15. (UFRJ-2006) Uma operadora de celular oferece dois

B C planos no sistema pós-pago. No plano A, paga-se uma

assinatura de R\$ 50,00 e cada minuto em ligações locais

custa R\$ 0,25. No plano B, paga-se um valor fixo de R\$ 40,00 para até 50 minutos em ligações locais e, a partir

de 50 minutos, o custo de cada minuto em ligações locais

A x D F é de R\$ 1,50.

A) **CALCULE** o valor da conta em cada plano para um

Considere um ponto C da hipotenusa e o retângulo ABCD, consumo mensal de 30 minutos em ligações locais.

sendo x a medida de AD. **DETERMINE**

B) **DETERMINE** a partir de quantos minutos, em ligações

A) a área S do retângulo ABCD em função de x. locais, o plano B deixa de ser mais vantajoso do que

B) para que valor(es) de x se tem $S \leq 1,25 \text{ cm}^2$. o plano A.

Editora Bernoulli 29

Frente C Módulo 07

16. (FEI-SP) **DETERMINE** o domínio da função f tal que

SEÇÃO ENEM

$f(x) = x^2 - 2x + x - 6$ 01. A tabela apresenta parte da planilha de custos de uma

fábrica:

17. (CEFET-MG) O número de soluções inteiras e estritamente

1 Custo por unidade 1 Descrição produzida (R\$)

positivas da inequação $\geq$ é

$$3x - 1 \leq x + 1$$

Matéria-prima 0,8

A) 0 D) 3

Mão de obra / Impostos 3

B) 1 E) 4

C) 2 Transporte 0,3

18. $x - 4$ Armazenagem 0,1

(UFOP-MG) O conjunto solução da inequação ≥ 0 é

$x + 3$ Energia 1,8

A) $]-\infty, -2]$

B) $]-3, +\infty[$ Além dos custos por unidade produzida, indicados na

C) $[-2, 2]$ tabela anterior, essa fábrica possui um custo fixo mensal

igual a R\$ 46 000,00 devido à locação de máquinas e

D) $]-3, -2] \cup [2, +\infty[$

equipamentos. Devido a limitações da linha de montagem,

E) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

o número mínimo de peças que podem ser produzidas é

19. igual a 3 000. Sabendo-se que cada unidade é revendida

(UFTM-MG) O intervalo que satisfaz a inequação

por R\$ 11,00, pode-se afirmar que o número de unidades

$x_2 + bx + 8 \leq 0$ tem comprimento 2. Portanto, o módulo que devem ser produzidas em um mês, para que o lucro

de **b** é líquido mensal da fábrica seja superior a R\$ 94 000,00, é

A) 4 D) 7 A) 28 000 D) 38 000

B) 5 E) 8 B) 31 000 E) 40 000

C) 6 C) 35 000

20. (FGV-SP-2006) O conjunto solução da inequação

$ax^2 - (a^2 + 1)x + a \leq 0$, sendo a um número real positivo

GABARITO

e menor do que 1, é

A) $\left[\frac{1}{a}, 1 \right]$ Fixação $|a|, |a|$

$\left[\frac{1}{a}, 1 \right]$ 01. B 02. D 03. A 04. A 05. D 1

B) $\left[-\frac{1}{a}, a \right]$

$|a|$ Propostos

C) $]0, a]$

01. D 03. B 05. B 07. C 09. B

D) $[-a, 0[$

02. E 04. C 06. D 08. A 10. B

E) $\left] \frac{1}{a}, 1 \right[$ 11. B a

12. A) $S = \{x \mid 3x - x^2, 0 < x < 3\}$

21. (UFLA-MG) Os valores de a para os quais a inequação $x^2 - 5x + a > 0$ seja verdadeira para todo x são $0 < a < \frac{25}{4}$

$$4x^2 + 1 \quad 13. D$$

A) $a < -3$ 14. D 3 ou $a > 4$ 4 15. A) Plano A: 57, 50; Plano B: R\$ 40,00

B) -3 3 B) A partir de 68 minutos em ligações locais. $-3 < a < 4$ 4
 16. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ e } x \neq 2\}$

C) $a < -3$ 17. B 18. D 19. C 20. A 21. C

4

4 4 Seção Enem

D) $-3 < a < 4$

3 3

E) $a > 4$ 01. B

3

30 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Função modular 08 C

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO

2º) Resolver a equação $|x - 4| = 10$.

DE UM NÚMERO REAL *Resolução:*

Se um número possui módulo 10, esse número pode

O módulo de um número real **a** é representado por $|a|$. ser igual a -10 ou 10 . Portanto, temos:

Exemplos $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ se } a, < 0 \\ a \text{ se } a, \geq 0 \end{array} \right\}$ ou $\Leftrightarrow$ ou $\left\{ \begin{array}{l} |a| \\ |a| \end{array} \right\}$ Em que $|a|$
 $= \left\{ \begin{array}{l} |a| \text{ se } a, < 0 \\ |a| \text{ se } a, \geq 0 \end{array} \right\}$ $|x - 4| = 10 \Rightarrow |x - 4| = 10$

$$|x - 4| = 10 \Rightarrow x - 4 = 10 \text{ ou } x - 4 = -10$$

1º) $|3| = 3$

Portanto, $S = \{-6, 14\}$.

2º) $|-4| = -(-4) = 4$



3º) Resolver a equação $|2x + |x - 1|| = 5$.

Geometricamente, o módulo de um

número real representa a distância do

Resolução: ponto **a** até a origem da reta real.

Resolvendo a equação anterior, temos:

Propriedades do módulo $\left| \begin{array}{l} 2x + x - 1 \\ = 5x - 1 = -2x + 5 \end{array} \right| \left| \right\} \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{ \text{ ou } \Leftrightarrow \right| \text{ i) } |x| \geq 0, \\ \forall x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ 2x + 5 \end{array} \right| + - = -x - = = -2x - 5 \left| \right.$

$$\text{ii) } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{iii) } \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ = -2x + 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ |x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall x, y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ = -2x + 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \text{ ou } \Leftrightarrow \right\} \text{ ou iv) } |x|_2 = x_2, \forall x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ 2x + 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ 2x + 5 \end{array} \right| =$$

$$\text{v) } |x| = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ ou } x \left| \begin{array}{l} 4x - 1 \\ = -2x - 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 4x - 1 \\ = -2x - 5 \end{array} \right| = -x$$

$$\text{vi) } \left| \begin{array}{l} 3 \\ = \end{array} \right|, \forall y \neq 0 \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ = -2x - 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow 5 \left\{ \text{ ou } \Leftrightarrow \right\} \left| \begin{array}{l} y \\ y \end{array} \right| \text{ ou } \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ 2x + 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x \\ = -6 \end{array} \right|$$

EQUAÇÃO MODULAR Substituindo cada um dos resultados na equação

original, verificamos que $x = -6$ ou $x = 2$ são soluções

É toda equação na qual a incógnita se encontra na forma da equação.

de módulo.

Portanto, $S = \{-6, 2\}$.

Exemplos

1º) 4º) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 3| = 14$
Resolver a equação $|x| = 8$.

Resolução: Resolução:

Há dois valores que satisfazem a equação:
Inicialmente, vamos calcular as raízes das expressões

$x = -8$ ou $x = 8$ dentro dos módulos.

Portanto, $S = \{-8, 8\}$. $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Editora Bernoulli **31**

Frente C Módulo 08

Observe que, 3º) Resolver a inequação $|3x - 2| \leq 7$.

i) para valores de x menores do que -3 , os termos $x - 1$ **Resolução:**

e $x + 3$ são **negativos**.

ii) $-7 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2 \Rightarrow$ para valores de x entre -3 e 1 , o termo $x - 1$ é **negativo** ,

iii) e o termo $x + 3$ é **positivo**. $5 - 5 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow - \leq x \leq 3$ para valores de x maiores do que 1, os termos $x - 1$ e 3

Assim, podemos representar esse fato no esquema a seguir: Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 3\}$. 3 e $x + 3$ são **positivos**. $\left| \begin{matrix} 5 \\ x \end{matrix} \right|$

||

$$x < -3 \quad -3 < x < 1 \quad 1 < x < 3 \quad x > 3$$

$$-(x - 1) - (x + 3) = 14 \quad -(x - 1) + (x + 3) = 14 \quad x - 1 + x + 3 = 14$$

$$+ 1 - x - 3 = 14 \quad -x + 1 + x + 3 = 14 \quad 2x = 12$$

$$-2x = 16 \quad 4 = 14 \quad x = 6$$

$$-2x = 16 \quad 4 = 14 \quad x = 6$$

$x = -8$ É uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

(convém) (absurdo) (convém)

Essa função, de acordo com a definição de módulo, pode

Devemos verificar também se as raízes -3 e 1 são soluções ser escrita da seguinte forma:

da equação:

i) $\left| \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \right|$ se $x \geq 0$ Para $x = -3$, temos $4 = 14$.

(absurdo) $f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ ii) Para $x = 1$, temos $4 = 14$. (absurdo)

Assim, as soluções são $x = -8$ ou $x = 6$. y

Portanto, $S = \{-8, 6\}$.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação é dita modular quando a incógnita se encontra na forma de módulo. O x

Exemplos O gráfico da função modular é a reunião de duas

1º) semirretas de mesma origem. Observe que:
Resolver a inequação $|x| > 7$.

Resolução: Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$.

Observe que há dois intervalos reais que satisfazem Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$. a essa condição: $x < -7$ ou $x > 7$

Portanto, $S = \{x \mid \text{A imagem da função modular é o conjunto } \{x \mid x < -7 \text{ ou } x > 7\}\}$.

Im =
 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

2º) Resolver a inequação $|x| < 7$.

Resolução:

Observe que há apenas um intervalo que satisfaz a

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

essa condição: $-7 < x < 7$

MODULARES Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$.

Generalizando: Gráficos de funções da forma

Seja a um número real positivo. Há dois casos possíveis: $y = |f(x)|$



1º caso: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$ Esse tipo de gráfico é obtido pela “reflexão” ou

“rebatimento”, em relação ao eixo x , das partes do gráfico



2º caso: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ nas quais $f(x) < 0$.

Função modular

Exemplos Efetuando a reflexão em torno do eixo x , temos o seguinte

gráfico:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 2|$.

Resolução:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x - 2$.

y

3

O 2 x

1

-2

Agora, basta efetuarmos uma reflexão, em torno do eixo x, **Outros gráficos**

da parte do gráfico que possui ordenada negativa. **Exemplos**

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x| + 3$.

2 **Resolução:**

Basta esboçarmos o gráfico da função $y = |x|$ e, em seguida, deslocarmos esse gráfico 3 unidades

O para cima. 2 x

$$y = |x| + 3$$

y **MATEMÁTICA**

-2

$$y = |x|$$

OBSERVAÇÃO 3

O gráfico da função básica $y = |x|$ também pode ser

obtido por esse processo. O x

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x^2 - 4x + 3|$. 2º)

Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| - 2$.

Resolução: Resolução:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e Basta esboçarmos o gráfico da função $y = |x - 1|$ e,

esboçar o gráfico da função $y = x - 4x + 3$.² em seguida, deslocarmos esse gráfico 2 unidades

para
baixo.

y **1º passo:** Esboço do gráfico da função $y = |x - 1|$:

Nesse caso, podemos utilizar o “rebatimento” em relação ao eixo x , descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de $y = x - 1$.

3 y

2 0 1 x

0 1 -1 3 x

-1

Editora Bernoulli **33**

Frente C Módulo 08

Agora, basta efetuarmos uma reflexão em torno Daí, observe que há três funções, uma para cada intervalo

do eixo x , da parte do gráfico que possui ordenada de x . Representando tais funções em um mesmo sistema negativa. de coordenadas cartesianas, temos:

y Função I y Função III

$$y = |x - 1|$$

1

Função
II

3

O 1 x

-1

1

2º passo: -2 O 1 1 x A partir do gráfico da função $y = |x - 1| - 2$ construído anteriormente, promoveremos uma translação do mesmo 2 unidades para baixo.

Para isso, é necessário encontrar os pontos de **4º)** Esboçar o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

interseção de $y = |x - 1| - 2$ com os eixos ordenados: **Resolução:**

- Interseção com o eixo Oy Inicialmente, esboçamos o gráfico da função $y = |x|$.

Fazendo $x = 0 \Rightarrow y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$ Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade

$y = 1 - 2$ para baixo, obtendo o gráfico da função $y = |x| - 1. \Rightarrow y = -1$

Finalmente, “rebatemos”, em relação ao eixo x ,

- Interseção com o eixo Ox a parte do gráfico com ordenada negativa, obtendo

Fazendo $y = 0 \Rightarrow 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$ o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

$$|x - 1| = 2 \quad y = |x| \Rightarrow$$

y

$$||x - 1| - 2| = |x| \Rightarrow$$

$$||x - 1| - 2| \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq x - 1 \leq 2 \quad \text{ou} \quad x - 1 \leq -2 \quad \text{ou} \quad x - 1 \geq 2$$

$$y = |x - 1|$$

$$y = |x - 1| - 2$$

1 O x

$$-1 \text{ O } y = |x| - 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad x$$

$$-1 \text{ y}$$

$$-2$$

3º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| + |x + 2|$.

Resolução: $-1 \text{ O } 1 \text{ x}$

Vamos calcular as raízes das expressões dentro dos -1 módulos:

$$x - 1 = 0 \text{ y } = ||x| - 1| \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x + 2 = 0 \\ \Rightarrow x = -2$$

Logo, podemos usar o seguinte esquema: y

$$x \leq -2 \quad -2 < x < 1 \quad 1 \leq x$$

$$y = -(x - 1) - (x + 2) \quad y = -(x - 1) + x + 2 \quad y = x - 1 + x + 2$$

$$y = -x + 1 - x - 2 \quad y = -x + 1 + x + 2 \quad y = 2x + 1$$

$$-1 \text{ O } 1 \text{ x}$$

$$y = -2x - 1 \quad y = 3$$

(função I) -1 (função II) (função III)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 04.

O conjunto

imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x + 8| + 1$ é

o
intervalo

01. x^2 A) $[5, +\infty[$ (UECE) Se $f(x) = -2$, então as raízes irracionais da 2 B) $[4, +\infty[$

equação $|f(x) - 6| = 8$ são

C)
 $[3,$
 $+\infty[$

A) $2^{1/2}$ e $-2^{1/2}$ C) $4^{1/2}$ e $-4^{1/2}$ D) $[1, +\infty[$

B) $3^{1/2}$ e $-3^{1/2}$ D) $5^{1/2}$ e $-5^{1/2}$ E) $[0, +\infty[$

02. (UFLA-MG-2009) Se $y = |x|_2 - 5|x| + 6$, a afirmativa **05.** (FGV-SP) A soma dos valores inteiros de x que

CORRETA é satisfazem, simultaneamente, as desigualdades

A) y se anula somente para quatro valores de x . $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geq 1$ é

B) y possui apenas um ponto de mínimo. A) 25

C) y se anula somente para dois valores de x . B) 13

D) y não é uma função par. C) 16

03. D) 18 (Cesgranrio) No gráfico a seguir, está representada a

E)
21

função do 1º grau $f(x)$.

5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 01.** (UFTM-MG-2007) Dada a desigualdade $1 < |x + 3| < 4$,
então a quantidade de valores inteiros não nulos de x
O que satisfaz é 3 x

A)
7

A) B) 6 MATEMÁTICA g(x) O
gráfico que **MELHOR** representa g(x)
 $= |f(x)| - 1$ é

C)
5

5

D)
4

E)
3

O 3 x

- 02.** (UEMS) Considerando as funções reais de variável real

B) $g(x) = 2f(x) = x$ e $g(x) = x - 2x + 1$, tem-se que

5

A) $(f \circ g)(x) = x - 1$

B) $(f \circ g)(x) = |x - 1|$

O 4

$$-1 \times C) (f \circ g)(x) = x$$

$$C) D) (f \circ g)(x) = x + 1 \quad g(x)$$

$$E) (f \circ g)(x) = |x + 1|$$

4

1 **03.** (UFF-RJ) Com relação aos conjuntos $P = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 17\}$

e $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0,333\dots\}$, afirma-se:

O 3 x

I.
P
U
Q
=
P

D) $g(x)$

$$II. Q - P = \{0\}$$

$$4 \text{ III. } P \subset Q$$

IV.
P
 $\cap$
Q
=
Q

O 2,4 x Somente são **VERDADEIRAS** as afirmativas

E) A) I e III. $g(x)$

B)
I e
IV.

4 C) II e III.

O 3 D) II e IV.

-1 x E) III e IV.

Editora Bernoulli 35

Frente C Módulo 08

04. (UFJF-MG) Sobre os elementos do conjunto solução da **06.**

(UECE) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 3\}$ e

equação $|x_2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| \geq 1\}$, a soma dos elementos de $A \cap B$

é
igual
a

A) são um número natural e um número inteiro.

A)
19

B) são números naturais.

B)
20

C) o único elemento é um número natural.

C)
21

D) um deles é um número racional, o outro é um número D) 22

irracional. E) 18

E) não existem, isto é, o conjunto solução é vazio.

07. (U F M G) Se j a f : → u m a f u n ç ã o t a l q u e

05. (UEL-PR) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ e $f(x) = y = |2x^2 - 8|$. O gráfico de $y = f(x)$ é $|x| + |x|$. O gráfico

da função $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x + 1)$, é

A) y

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ e } x \leq -1$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$-3$$

B) $y \leq -2$ e $0 \leq x \leq 2$

$$3$$

C)
 y

$$2 \leq x \leq 1$$

$$-2 \leq x \leq -1 \text{ e } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -2 \leq x \leq 2$$

$y \leq 2$ e y

C)

$$\begin{matrix} - \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$3 \leq x \leq 3$$

1

$$-2 -1 \text{ E) } y \text{ O } x \text{ } 1 \text{ } 2 \text{ } -2 \text{ } 2$$

O x

D) y

$$2 -8 \text{ } 1$$

08. (UFRGS) Para $-1 < x < 1$, o gráfico da função $O x^2 + 2$

$-1 \leq y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincide com o gráfico da função

$-2 \leq y = ax + b$. Os valores de **a** e **b** são, respectivamente,

A)
-1
e -
1

E) y B) 2 e -1

$$-2 \text{ x C) } -1 \text{ e } 2 \text{ } -1 \text{ O } 1 \text{ } 2$$

$$-1 \text{ } 1 \text{ D) e } -1 \text{ } 2 \text{ } -2$$

$$-3 \text{ E) } - \text{ e } 1$$

36 Coleção Estudo

Função modular

09. (UFLA-MG) O gráfico da expressão $|x| + |y| = 4$ é dado por

11. (UFCE) Seja f uma função real de variável real cujo gráfico

A) y D) y a alternativa cujo gráfico está representado a seguir. Se $g(x) = 2.f(x) - 1$, assinale

4 **MELHOR** representa $|g(x)|$.

$f(x)$

–4 4 1 x –4 0 4 x 2 0

0 1 3 4 x

–1

–4

A)

|

$g(x)|$

B) y E) y

4 1

–4 x –4 –1 0 1 2 4 x 7 4 2 2 0 4 0 x

–4 B) $|g(x)|$

C) y 4 1 7 1 2

2 4

$$-4 \text{ O } 2 \times 4 - 1$$

$$\text{O x C) } |g(x)|$$

3

$$-4$$

1

10. (UFMG–2010) Considere a função $f(x) = x|1 - x|$. O 1 2 3 4 x
Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função D) $|g(x)|$ está
CORRETO.

A) y **MATEMÁTICA**

1

O 1 2 3 4 x

O

$$1 \text{ E) } |g(x)| \times$$

3

1

B) y

O 1 2 7 4 x

2 2

O **12.** (UFC-2008) Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na interseção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a

C) A) 5 D) 2 y

B) 4 E) 1

C)
3

O 1

x **13.** (ITA-SP) Sabendo-se que as soluções da equação

$|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que

D) A) $a = 1$ e $b = 6$ y

B) $a = 0$ e $b = -6$

C) $a = 1$ e $b = -6$

O 1 x D) $a = 0$ e $b = -9$

E) não existem a e b a menos que $x^2 - ax + b = 0$

contenha todas as raízes da equação dada.

Editora Bernoulli **37**

Frente C Módulo 08

14. (UFMG) Observe a figura. **02.** A elaboração de um programa de computadores consiste

2 y em fornecer uma série de comandos ao computador r para que o mesmo execute uma determinada tarefa.

Tais comandos devem ser dados em uma linguagem

1

2 apropriada, chamada linguagem de programação.

O 1 3 x É comum que um programador, antes de digitar o

-1 programa propriamente dito, crie um algoritmo, ou

seja, uma espécie de rascunho que contém a sequência

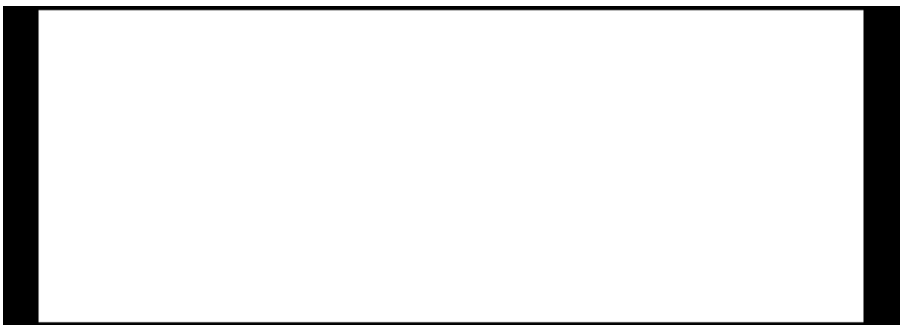
A reta r é o gráfico de uma função g . Seja f a função

de operações que o futuro programa deverá executar.

dada por $f(x) = |x - 1|$. Pode-se afirmar que $f(x) \leq g(x)$

Um programador escreveu em um papel o seguinte
tem como conjunto solução algoritmo:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ D) $\emptyset$



B) $\{x \mid \text{Passo 1) Dados iniciais} \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ E)

C) $\{x \mid x_0: \text{valor de entrada} \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

Passo 2) Faça $x_0 - 1$.

15. (UFRJ) Seja f a função real dada por $f(x) = ax^2$ Passo 3) Se $|x| +$

$|bx + c, 0 - 1| = 6$, então FIM.

com $a > 0$. Passo 4) Se $|x_0 - 1| \neq 6$, então VOLTE AO PASSO 2, **DETERMINE a , b e c** , sabendo que as raízes

da equação $|f(x)| = 12$ são -2, 1, 2 e 5. UTILIZANDO $|x_0 - 1|$ COMO DADO DE ENTRADA. **JUSTIFIQUE**

sua resposta.

Após a implementação do programa, foram feitos vários

16. testes. Em um desses testes, verificou-se que o passo 2

(UFES)

foi repetido uma única vez, antes de o programa terminar.

y

O número de valores reais possíveis para o dado de

1 entrada x , nessas condições, é igual a o

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

-2 -1 0 1 2 x

O gráfico anterior representa a função

A) $f(x) = ||x| - 1|$ **GABARITO**

B) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$

C) $f(x) = ||x| + 2| - 3$ **Fixação**

D) $f(x) = |x - 1|$

01. C 02. A 03. E 04. A 05. E

E) $f(x) = ||x| + 1| - 2$

SEÇÃO ENEM

01. E 10. B

01. Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia 02. B 11. E

na resolução de um desafio matemático. O professor

03. B 12. B

forneceu uma série de informações acerca de um

número Y . A primeira equipe que conseguisse determinar 04. A 13.

D

esse número venceria a prova.

05. A 14. B

As informações eram as seguintes:

06. C 15. $a = 2$

• O número Y é natural.

• O número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da 07. B $b = -6$

origem da reta real.

08. C $c = -8$

Acerca do número Y , podemos concluir que

09. A 16. A

A) é um número primo.

B) possui 6 divisores naturais.

C) é divisor de 56. **Seção Enem**

D) é um número ímpar. 01. C 02. B

E) é múltiplo de 3.

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Triângulo retângulo 07 D

INTRODUÇÃO Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta

adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e

Considere o triângulo retângulo ABC a seguir: $c^2 = am$, obtendo:

$$a^2 b + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

c b Como $n + m = a$, concluímos que: h



B C H m n

$$b^2 + c^2 = a^2$$

a

Em que: OBSERVAÇÃO

- **b** e **c** são as medidas dos catetos; O recíproco Teorema de Pitágoras também é válido, ou seja,
- **a** é a medida da hipotenusa; se em um triângulo o quadrado de um lado for igual à soma dos
- **h** é a medida da altura relativa à hipotenusa; quadrados dos outros dois, então o triângulo será retângulo.
- **m** é a medida da projeção ortogonal do cateto AB sobre Resumindo as relações encontradas e excluindo as

a hipotenusa. repetidas, vale a pena memorizar as seguintes:

- **n** é a medida da projeção ortogonal do cateto AC sobre



a hipotenusa.

retângulo em dois outros triângulos semelhantes a ele, como Pela altura relativa à hipotenusa, separamos o triângulo ii) $c^2 = am$ v) $a^2 = b^2 + c^2$ i) $b^2 = an$ iv) $ah = bc$ mostrado a seguir: iii) $h^2 = mn$

c b MEDIDA DA MEDIANA RELATIVA

B C À HIPOTENUSA a

A A

“Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à
c b hipotenusa mede metade da hipotenusa.” h h

B

B H H C m n

Pela semelhança entre esses triângulos, temos: M
(Ponto médio)

$$a \ b \ c \mid c \mid ah \ bc =$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \mid \frac{ah}{bc} = \frac{bc}{am} \mid \frac{ch}{bm}$$

$$\mid =$$



$$\Delta a \mid \frac{a}{2} \mid b = \frac{an}{b} \mid \frac{bc}{c} \mid BC \mid ABC \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{ah}{bc} = \frac{bc}{am} \mid \frac{ch}{bm}$$

$\Delta ABC \mid BH = CH$ Para provar essa propriedade, construa o retângulo $ABDC$ e $HM \mid HBA \sim \Delta HAC \Leftrightarrow BH = CH \Leftrightarrow$
 $\mid CH = BM$ suas diagonais. As diagonais de um retângulo são congruentes $BH = CH \mid BH = CM \mid$ e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma.

Editora Bernoulli 39

Frente D Módulo 07

Logo, este é o ponto médio, **M**, da hipotenusa do triângulo ABC : **02.** (UFRGS) O lampião, representado na figura, está

suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto.

BD

16

M2 Sabendo que essas cordas medem e , a distância 5

do
lâmpião
ao
teto
é

AC

$AD \parallel BC$

Como $AD = BC$ e $AM = \dots$, concluímos que $AM = \dots$.

$$2^2$$

Outra maneira de verificar tal propriedade é através da

circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

A)
1,69

B

B)
1,3

M C) 0,6

1

D)

2

A C

6

E)

13

que ele “enxerga” mede 180° . Portanto, o segmento

03. (UFTM-MG-2009) Uma praça tem a forma de um $\square$ é Como o ângulo inscrito na circunferência é reto, o arco B^1C

BC

o diâmetro, e o ponto médio pentágono convexo, mostrado na

figura, em que as **M** é o centro da circunferência.

Logo, a medida dimensões estão indicadas em metros. **AM**

é igual ao raio da circunferência, de
onde

conclui-se que $AM = BC \cdot 2 \cdot A E$

D

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO ₈₀

01. (UFMG–2006) Nesta figura, estão representadas três

circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta **B** (figura fora de
escala) **C**

tangente às três circunferências. 120

Existem duas opções para ir do ponto **A** até o ponto **C**, contornando a
praça. São elas:

- I. Saindo de **A**, pode-se seguir em linha reta até **E**,
depois até **D** e, finalmente, encaminhar-se até **C**.

Sabe-se que o raio de cada uma das duas circunferências II. Saindo
de **A**, pode-se seguir em linha reta até **B** e

maiores mede 1 cm. Então, é **CORRETO** afirmar que a depois
dirigir-se até **C**.

medida do raio da circunferência menor é Se, nas duas opções, a
distância total a ser percorrida

A) 1 é a mesma e, sendo $DE > DC$, então a distância entre cm. 3 D e E, em metros, é igual a

B) 1 A) 70 cm. 4 B) 80

C) cm. C) 90 2

2

D)
100

2

D) cm.

4 E) 110

40 Coleção Estudo

Triângulo retângulo

04. (FUVEST-SP) Os lados de um triângulo medem 15 , 110 e 5. **03.** (PUC Minas) A interseção de duas retas perpendiculares,

Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior? r e s , é um ponto A. Um ponto B, de r , está a 3 m de A e um

ponto C, de s , está a 4 m de A. A distância de A à reta BC,

05. em metros, mede (FUVEST-SP-2006) Na figura a seguir, tem-se $AC = 3$,

$AB = 4$ e $CB = 6$. O valor de CD é A) 2,5

A B) 2,4

C)
2,3

D)
2,0

C E) 1,5 D B

A) 17 ^ 04. (UFU-MG) Num triângulo ABC, o ângulo A é reto.

12 A altura h divide a hipotenusa a em dois segmentos A

19

B) m e n ($m > n$). Sabendo-se que o cateto b é o dobro do

12

23 cateto c, podemos afirmar que é m

C) n

12

25 A) 4 7 D)

D) 2

12

B) 3 E) 5

E) C) 2 29

12

05. (UFG) O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de

EXERCÍCIOS PROPOSTOS altura é 18 cm.

Os lados deste triângulo, em cm, são

A) 7, 7, 4 D) 4, 4, 10

01. (UFMG) Observe a figura. B) 5, 5, 8 E) 3, 3, 12

D R C C) 6, 6, 6 MATEMÁTICA

Q 06. (Cesgranrio) No quadrado ABCD da figura, tem-se $AB = 4$,

$SAH = CI = 1$ e $AG = 2$. Então, HI mede

A G A B P B

H

Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e

$AP = AS = CR = CQ$. O perímetro do quadrilátero PQRS é

A) $11\sqrt{13}$

B) $22\sqrt{3} + 11$

C) $11\sqrt{2}$

D) $22\sqrt{5}$ E) $16\sqrt{15} + 5\sqrt{3}$

2 3

02. (PUC Minas) Constrói-se um triângulo retângulo de catetos **07.**
(UEPA) No quadrilátero ABCD a seguir, tem-se $AB = 4$ cm,

$AB \perp BC = 5$ cm, $CD = 6$ cm e AC perpendicular a BD. e $AC = AB$.
O seno do maior ângulo agudo desse 2 A medida do lado AD vale

triângulo é igual a

C

A)

5 D

3 5

B)

5

C) A 4 5

B

5

D) A) 7 cm. D) $3^1 5$ cm. ¹ 5

E) 6 5 B) 3 cm. E) $3^1 3$ cm.

5 C) $^1 2$ cm.

Editora Bernoulli 41

Frente D Módulo 07

08. (USS-RJ) Em um triângulo retângulo, o quadrado da **12.** (UFRJ) Na figura, o triângulo AEC é equilátero, e ABCD é

hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Então, um quadrado de lado 2 cm. **CALCULE** a distância BE.

dos ângulos agudos do triângulo vale

E

A) 30° B) 60° C) 45° D) 15° E) 10°

A B

09. (Mackenzie-SP) A circunferência de raio a é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Se $MN = NP = R$, então a é igual a D C

a 13. (UFF-RJ) Na figura a seguir, os triângulos ABC e DEF são equiláteros. Sabendo que AB, CD e DE medem, respectivamente, 6 m, 4 m e 4 m, **CALCULE** a medida M N P de BE.

B

A) R 2 E R D) 2 3

B) R 3 R A C D F E) 2 2

R **14.** (FUVEST-SP) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira

C) num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura a 4
seguir. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base

10. (FUVEST-SP) A secção transversal de um maço de cigarros mede 0,5 m. Logo, a altura **h**, em metros, é

é um retângulo que acomoda exatamente os cigarros
como na figura. Se o raio dos cigarros é **r**, as dimensões
do retângulo são h

2,5 m

A)
1
+
7

2

A) $15r$ e $2r(1 + \sqrt{3})$ D) $15r$ e $3r(1 + \sqrt{7})$ B) $7r$ e $3r$ E) $(2 + 3\sqrt{3})r$ e $2r(1 + 3\sqrt{3})$

11. (UNESP) Uma gangorra é formada por uma haste rígida 7 D) 1 + AB , apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C , 3

como na figura. Quando a extremidade B da haste toca o

chão, a altura da extremidade E) 1 + 7 A em relação ao chão é

4

1,8 m B **15.** (FUVEST-SP) Em um triângulo retângulo OAB, retângulo

1,2 m C OA em O, com OA = a e OB = b, são dados os pontos P em e Q em OB de tal maneira que AP = PQ = QB = x.

$$DC = CE = DE = 1 \text{ m}$$

A Nessas condições, o valor de x é

O

D E

A) 5 3 Q ¹ P 3 m. D) m.

6

B) 3 A B m. E) 2 ¹ 2 m. 3 A) ¹ ab - a - b D) a + b + ¹ 2ab

6 3 B) a + b - ¹2ab E) ¹ab + a + b

C) m.

5 C) ab

Triângulo retângulo

16. (FCMSC-SP) Seja um triângulo ABC, retângulo em A, tal **02.**
(Enem-2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de

que $AB = 30$ cm e $BC = 50$ cm. Se um ponto D é marcado
iluminação de ambiente e necessita saber a altura que

no lado AC, de modo que $BD = DC$, então o segmento deverá
instalar a luminária ilustrada na figura.

DC mede Luminária

A) 31,25 cm.

B) 32,5 cm.

C) 31,75 cm.

D) 32 cm. $g = 5$ m

E) 32,25 cm.

h

17. (FUVEST-SP) Em uma semicircunferência de centro C e
raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D
o ponto em que a bissetriz do ângulo BCA intercepta a
semicircunferência. O comprimento da corda AD é

B

D

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área

A circular de $28,26 \text{ m}^2$, considerando $p \cong 3,14$, a altura **h**

será
igual
a

R

A) 3 m. D) 9 m.

C

B) 4 m. E) 16 m.

A) R 2 – 3 C) 5 m.

B) R 3 – 2 **03.** Uma torre de transmissão vertical possui
vários cabos de

sustentação, conforme ilustração a seguir:

C) R 2 1 – **MATEMÁTICA**

Torre

D) R 3 1 – C

E) R 3 – 2 Cabo de sustentação

B

Pontos de apoio

SEÇÃO ENEM do cabo A

01. Antônio adora soltar pipas. Para confeccionar uma pipa

nova, ele faz uma armação com dois quadrados iguais O ABCD e EFGH, ambos com lado a e centro O , conforme a figura. Se $EP = 2$ cm, então podemos afirmar que o α lado a do quadrado é, em cm,

O local de instalação da torre será representado pelo F plano α , os pontos de apoio dos cabos serão colocados

A B em pontos das circunferências l_1, l_2, l_3 , concêntricas e

l_1, l_2, l_3

de centro O , sendo as medidas dos raios 30 m, 50 m e 290 m, respectivamente. Os pontos de apoio dos cabos

E G

P O serão vértices de um triângulo equilátero, inscrito em cada circunferência. Sabendo-se que $OA = AB = BC = 60$ m, D C e que os pontos de apoio que estão sobre uma mesma H circunferência são equidistantes um do outro, o valor

A) $4(13 + 1)$ mínimo de cabo com apoio na circunferência de raio 30 m,

B) $4 +$ em metros, usada na sustentação da torre é 12

C) A) 30^{15} D) $90^{13} + 2^{15}$

D) 2 B) 55^{15} E) $120^{15} + 2$

E) $4(12 + 1)$ C) 70^{15}

Frente D Módulo 07

04. O cálculo da vela de uma asa-delta é importante para a

segurança dos praticantes desse esporte. Um dos modelos

GABARITO

de asa-delta consiste em dois triângulos isósceles,

$\triangle ABC$ de base AC e $\triangle AOC$ de base AC, ligados ao longo da

Fixação

quilha, formando um ângulo de 90° no nariz, conforme

a figura a seguir: 01. B

A

02.
E

03.
B

04.
1

05.
E

B O Nariz

Quilha Propostos

01.
D

02.
A

03.
B

C

04.
A

Sabendo que $OA = OB = OC = a$, então o valor do segmento AB é 05. B

A) $a^2 - 2$ D) $a^2 + 3$ 06. E

B) $a^2 + a^2$ E) 07. E

2

C) $a^2 - 3$ 08. C

05. 09. D Na confecção do número de dentes e da profundidade dos sulcos (fresas) das engrenagens, é importante determinar

10.
A

as medidas do triângulo imaginário ABC, como na figura

a seguir. Para regulagem das máquinas, é necessário 11. D
 calcular a altura BD do triângulo ABC.

12.
 BE
 =
¹6
 –
¹2

**Processo de usinagem para confecção de
 engrenagens cônicas** 13. BE = 2¹21

A

14.
 E

D o s 15. B

Pinhã 16. A

17.
 A

Roda B Seção aproximada das
 engrenagen **Seção Enem**

C

01.
 E

02.
 B

Se, nessa engrenagem, $AB = 12 \text{ cm}$ e $BC = 16 \text{ cm}$,

03.

D

a altura BD do triângulo ABC é

A) 9,2 cm. D) 9,5 cm. 04. A

B) 9,3 cm. E) 9,6 cm.

05.

E

C) 9,4 cm.

44 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Lei dos senos e lei dos cossenos 08

D

LEI DOS SENOS OBSERVAÇÃO

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares
são

Considere um triângulo ABC qualquer, inscrito em
uma iguais, isto é:

circunferência l de raio **R**. Traçando o diâmetro BD,

temos

que o triângulo BCD é retângulo em C, pois o ângulo BCD $\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen } x$ “enxerga” um arco de 180° .

O ângulo Por exemplo, sendo $x = 60^\circ$, temos: D é congruente ao ângulo A , pois ambos são

inscritos na circunferência e “enxergam” o mesmo arco B²C. $3 \text{ sen } x = \text{sen } 60^\circ = e \text{ } 2$

A 3

$$\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ =$$

2

$\lambda \text{ } A$

$b \text{ } D$ LEI DOS COSSENOS

$c \text{ } A \text{ } R$

o Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura AD.

R

B A C

B a C

$c \text{ } b$

$\Rightarrow m = c \cdot \cos B$. (IV) c é o dobro do raio da circunferência circunscrita a esse

triângulo, ou seja: Substituindo (IV) em (III):



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$



$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin b}{b} = \frac{\sin c}{c} = 2R$ $\left| \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array} \right.$ Analogamente, conclui-se que

Editora Bernoulli 45

Frente D Módulo 08

A Lei dos Cossenos pode, então, ser enunciada da seguinte **EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO**

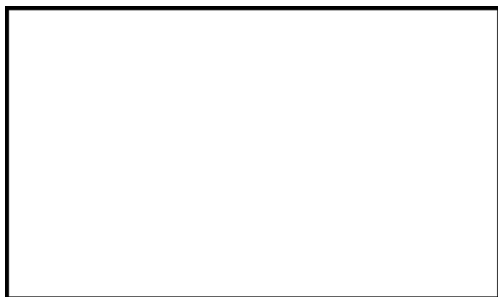
maneira:

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos

lados **01.** (UFMG–2006) Esta figura representa o quadrilátero ABCD.

é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do B C

dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por 120° eles formado, ou seja:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

A D

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ Sabe-se que $AB = 1$ cm e $AD = 2$ cm; o ângulo ABC mede

120° ; e o segmento CD é perpendicular aos segmentos

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$ AD e BC. Então, é **CORRETO** afirmar que o comprimento

do
segmento
BD
é

OBSERVAÇÃO cm. C) cm. A) $1\sqrt{6}$ 3

diferem apenas no sinal, ou seja: Os valores dos

cossenos de dois ângulos suplementares 5 B) cm. D) $\frac{1}{2}$ cm.
2

02. (PUC Minas) A Lei dos Cossenos diz o seguinte: o quadrado



do lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$

dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois

lados pelo cosseno do ângulo entre eles. O cosseno do

Por exemplo, sendo $x = 45^\circ$, temos: ângulo q , do triângulo da figura, é igual a

$$\cos x = \cos 45^\circ = \frac{e}{2}$$

$$2$$

$$3 \cdot 2$$

$$2$$

$$\cos(180^\circ - x) = \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$2$$

$$4$$

NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

$$1 \cdot 1$$

$$A) - D) -$$

Um triângulo, quanto aos seus ângulos, é classificado em

acutângulo, retângulo ou obtusângulo. B) – E) – 1 1

36

Sabe-se que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o 1 C) –

4

maior ângulo, e vice-versa. Assim, conhecendo as medidas

dos três lados, podemos determinar as medidas dos três **03.** (FUVEST-SP) Na figura a seguir, $AD = 2$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, ângulos pela Lei dos Cossenos e, portanto, classificar a medida do ângulo BAC é 30° e $BD = DC$, em que **D** é

o triângulo. ponto do lado AC. A medida do lado BC, em cm, é

Seja o triângulo ABC, com lados medindo a , b e c , em

que $a \geq b \geq c$.

Tem-se três possibilidades quanto à natureza do triângulo

ABC:

i) D A C

O ΔABC é acutângulo se, e somente se, $a_2 < b_2 + c_2$.

ii) A) ¹³ D) ¹⁶ O ΔABC é retângulo se, e somente se, $a_2 = b_2 + c_2$. B) ² E) ¹⁷

iii) O ΔABC é obtusângulo se, e somente se, $a_2 > b_2 + c_2$. C) ¹⁵

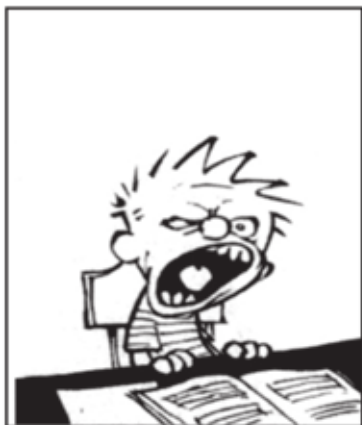
46 Coleção Estudo

Lei dos senos e lei dos cossenos

04. (UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir: **02.** (PUC-SP-2008) Leia com atenção o problema proposto

a Calvin na tira seguinte:

C



O ponto A é duas vezes mais distante do ponto C do que o ponto B é de A. Se a distância de B a C é de 5 cm, qual é a distância do ponto A ao ponto C?

D

α

A B

Sabendo-se que $\alpha = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ cm, então AD

é igual a

OS MORTOS-VIVOS NÃO

2 PRECISAM RESOLVER JOGOS

A) DE PALAVRAS. cm.

3

2

B) cm.

3

2

C) cm.

3

D) 3 O ESTADO DE S. PAULO, 28 abr. 2007. cm. 2

Supondo que os pontos **A**, **B** e **C** sejam vértices de um

05. triângulo cujo ângulo do vértice **A** mede 60° , então a

(UFJF-MG) Dois lados de um triângulo medem 8 m e

resposta **CORRETA** que Calvin deveria encontrar para o

10 m, e formam um ângulo de 60° . O terceiro lado desse problema é, em centímetros,

triângulo mede **MATEMÁTICA**

A) D) 5^1 5 33

A) 2^1 21 3

B) 2^1 31 8 3 B) E) 10^1 3 3 C) 2^1 41

D) 2^1 10 3 51

C)

E) 2^{161}

03. (EESC-SP) Dado o triângulo ABC, tal que $AC = 2$,

$$BC = \pi, \quad \frac{1}{3} C = \frac{\pi}{6}, \text{ temos } 6$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

$$AB = \frac{1}{2}$$

01. (FUVEST-SP) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. B) $AB = \frac{1}{3}$ E) N.d.a.

O cosseno do maior ângulo de T é C) $AB = \frac{1}{2}$

5

A) **04.** (PUC-SP) Sejam **a**, **b** e **c** as medidas dos lados de um

triângulo ABC. Então, se

$$B) \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$$

5 A) $a < b^2 + c^2$, o triângulo ABC é retângulo.

C) $a^2 = b^2 + c^2$, o lado **a** mede a soma das medidas de

4 **b** e **c**.

C) $a^2 > b^2 + c^2$, o ângulo oposto ao lado que mede **a** é

D) obtuso. 2

3

D) $b^2 = a^2 + c^2$, **a** é a hipotenusa, e **b** e **c** são catetos.

1

E)

8 E) Nenhuma das anteriores é correta.

Frente D Módulo 08

05. (UNESP–2009) Paulo e Marta estão brincando de jogar **08.**
(UFJF-MG–2007) Os lados AB e AC de um triângulo ABC

dardos. O alvo é um disco circular de centro **O**. Paulo 1 formam um ângulo α , tal que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Sabe-se que 3 joga um dardo, que atinge o alvo num ponto que vamos

denotar por **P** a medida do lado BC é igual a $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ cm e que a medida de **P**; em seguida, Marta joga outro dardo, que

atinge um ponto denotado por **M** a medida do lado AC é o triplo da medida do lado AB. Sendo b o ângulo **M**, conforme figura.

formado entre os lados AC e BC, podemos afirmar que

A) $b < 30^\circ$, e a medida do lado AB é um inteiro par.

B) $b < 30^\circ$, e a medida do lado AB é um inteiro ímpar.

C) $30^\circ \leq b < 45^\circ$, e a medida do lado AB é um inteiro par.

D) $30^\circ \leq b < 45^\circ$, e a medida do lado AB é um inteiro ímpar.

E) $45^\circ \leq b < 60^\circ$, e a medida do lado AB é um inteiro par.

09. (Cesesp-PE) “Com três segmentos de comprimentos

iguais a 10 cm, 12 cm e 23 cm,

A) é possível formar apenas um triângulo retângulo.”

Sabendo-se que a distância do ponto **P** ao centro **O** B) é possível

formar apenas um triângulo obtusângulo.”

do alvo é $PO = 10$ cm, que a distância de **P** a **M** é C) é possível formar apenas um triângulo acutângulo.”

$PM = 14$ cm e que o ângulo POM mede 120° , a distância,

D) não é possível formar um triângulo.”

em centímetros, do ponto **M** ao centro **O** é

E) é possível formar qualquer um dos triângulos:

A) 12 D) 6

retângulo, acutângulo ou obtusângulo.”

B) 9 E) 5

C) 8 **10.** (PUC-SP) A diagonal de um paralelogramo divide um

dos ângulos internos em dois outros, um de 60° e

06. (FUVEST-SP) ABC é equilátero de lado 4; $AM = MC = 2$, outro de 45° . A razão entre os lados menor e maior do

$AP = 3$ e $PB = 1$. O perímetro do triângulo APM é paralelogramo é

A 3 A) 6

P M 2 B) 2

2

3

C)

B C 9

A) $5 + 6$ ¹ 7 D) 3 B) $5 +$ ¹ 10

C) $5 + 3^1$ 19 E) 3

D) $5 + 13$ 6 3 –

E) 5 + **11.** (Cesgranrio) Se 4 cm, 5 cm e 6 cm são as medidas dos

13 6 3 +

lados de um triângulo, então o cosseno do seu menor

07. ângulo vale (UFBA) Na figura a seguir, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm e

$B = 60^\circ$. AD é, aproximadamente, igual a 5 A) 6 A

4

B)

D 5

α 3 C) α 4

B C

2

D)

A) 1,2 cm. D) 1,8 cm. 3

B) 1,4 cm. E) 2,04 cm.

C) 1,54 cm. E) 1

2

Lei dos senos e lei dos cossenos

12. (UFG) No triângulo a seguir, os valores de x e y , nessa **15.** (FEL-SP) Assinale a alternativa **FALSA** quanto ao tipo de

ordem, são triângulo, dados os lados a , b e c .

A) Se $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$, o triângulo é retângulo.

x B) Se $a = 18$, $b = 5$, $c = 12$, é um triângulo.

y C) Se $a = 5$, $b = 5$, $c = 5$, o triângulo é equilátero.

135°

15° D) Se $a = 5$, $b = 7$, $c = 7$, o triângulo é isósceles.

12 E) Se $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, não é triângulo.

A) 2 e 13

16. (ITA-SP) O triângulo ABC, inscrito numa circunferência,

B) $^{13} - 1$ e 2

20

$2 \ 3 \ 6 - 2 \ \pi$ tem um lado medindo cm, cujo ângulo oposto é de 15° .

C) e O comprimento da circunferência, em cm, é $3 \ 3$

D) 6 A) $20^{12}(1 + ^{13}) - 2 \ 2 \ 3$ e $3 \ 3$ B) 40
 $(2 + ^{13})$

E) 2 e $^{13} - 1$ C) $80(1 + ^{13})$

13. D) $10(2^1 3 + 5)$ (FESP-PR) Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos

equiláteros de lados $2a$ e $20(1 + 13)a$, respectivamente. Podemos

afirmar, então, que o segmento CD mede

17. (Mackenzie-SP) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, C em escala 1:10 000, como na figura. Das alternativas, a D que **MELHOR** se aproxima de distância entre as ilhas A e

B é

MATEMÁTICA

B

A B E

A) $5 \cdot 30^\circ$ a D) $a^1 2 2$

B) $3a \cdot 105^\circ$ E) $a^1 3 2$ A) 12 cm C

C) $2a$

A)
2,3
km.

14. (UFC) Os lados AC e CD dos triângulos equiláteros ABC e B) $2,1 \text{ km}$.

CED medem, respectivamente, 6 m e 3 m . Os segmentos AC C) $1,9 \text{ km}$.

e CD estão numa reta r , são consecutivos e AD mede 9 m.

D)
1,4
km.

Se os vértices **B** e **E** estão no mesmo semiplano

determinado por r , então o perímetro, em metros, do E) 1,7 km.

quadrilátero ABED é igual a

A) **3 18.** $(6 + 13)$ (UFPE–2007) Na ilustração a seguir, ABCD e ABEF são

B) $3 \left(\frac{1}{5} 2^{130} \right)$, BE mede 6 e BC mede 10, qual a distância entre $\frac{1}{6}$ + retângulos, e o ângulo D AF mede 60° . Se AB mede

$\frac{1}{3}$ os vértices C e F? $\left(\frac{1}{3} \right)$

C) $3 \left(\frac{1}{2} D A \right) \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{2} \right) 60^\circ \left(\frac{1}{2} \right) F$

D) $3 \left(\frac{1}{2} \right) 8 - \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$

E) $3 \left(\frac{1}{3} C B \right) \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) E$

Editora Bernoulli **49**

Frente D Módulo 08

19. (ITA-SP) Num triângulo ABC, $BC = 4$ cm, o ângulo C mede **02.**

Uma empresa ao construir uma linha férrea acaba por

30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm. deparar-se com uma nascente de água e seu curso será

O comprimento da mediana que sai do vértice A mede alterado para garantir um custo menor de construção,

figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de

A) 1 cm.

construção depende da diferença entre a distância efetiva

B) $\frac{1}{2}$ 2 cm. de construção (soma das distâncias dos segmentos AC

C) 0,9 cm. e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do

D) segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa $\frac{1}{3}$ 3 cm.

diferença de percurso, em km, é

E) 2 cm.

Figura 1

20. (Unifor-CE) Um terreno de forma triangular tem frentes



Fi
2

de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um



ângulo de 120° . A medida do terceiro lado do terreno,

em metros, é 60° B

A) 10 C 20 km

15

B) 10 A) 5 3 1 – $^1 6$ ()

C) 10^{17} B) 5 2 (– 3)

D) 26 () C) $10^3 1 -$

E) 20^{12} () D) $10^2 - 3$



SEÇÃO ENEM



01. Em escolas infantis, é comum encontrar um brinquedo,



chamado escorregador, constituído de uma superfície

GABARITO



plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças



deslizam, e de uma escada. No pátio da escolinha Casa

Fixação



Feliz, há um escorregador, apoiado em um piso plano



01. A 02. C 03. A 04. A 05. A



e horizontal, cuja escada tem 8 degraus espaçados de



25 cm e forma um ângulo de 60° com o piso.



O comprimento da rampa, sabendo-se que ela forma com



Propostos

01. E 11. C

02. C 12. E

03. E 13. E

04. C 14. A

05. D 15. B

60° 45° 06. A 16. A

07. C 17. E

08. A 18. 14

o chão um ângulo de 45° , é de

09. D 19. A

A) 13 m .

10. D 20. C

B) 16 m .

C) 2^{12} m . **Seção Enem**

D) 2^{13} m . 01. B 02. E

E) 2^{16} m .

50 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Cônicas 13 E

ELIPSE Substituindo (2) em (1), temos:

$$AF_1 + AF_2 = 2a \Rightarrow AF_1 = 2a - AF_2$$

Considerem-se, num plano α , dois pontos fixos e distintos

F_1 e F_2 , e seja $2c$ a distância entre eles. Uma elipse E é o conjunto dos pontos de α , cuja soma das distâncias a F_1 e F_2

é uma constante $2a$ maior que $2c$. $AF_1 + AF_2 = 2a$

E

$2a$

$F_1 F_2$

iii) Os segmentos BF_1 e BF_2 têm medida a . De fato:

$$2c = BF_1 + BF_2 = 2a \Rightarrow BF_1 = a, BF_2 = a$$

F_1 e F_2 : focos da elipse; $2c$

$2a = 2c$: distância focal;

Em símbolos: $P \in E \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$

ELEMENTOS DA ELIPSE

iv) Relação fundamental:

i) A elipse possui dois eixos de simetria AA' e BB'

perpendiculares em S . Sendo $BB' = 2b$, então $BC = b$. C , ponto médio de AA' e BB' .

AA' é chamado eixo maior.

BB' é chamado eixo menor.

C é chamado centro da elipse.

B_1

$E B_2$

A Do triângulo CBF , tem-se:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

B_2

v) Chama-se excentricidade da elipse o número e , tal

que:

ii) O eixo maior AA' tem medida $2a$. De fato: _{1 2}



$$A \in E \Rightarrow AF_1 + AF_2 = 2a \quad (1)_{11112} \quad c/e = (0 < e < 1)$$

a Mas, $AF_1 = AF_2$ (simetria). $(2)_{1122}$

Editora Bernoulli **51**

Frente E Módulo 13

EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

2º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo y .

y

Serão estudadas as equações das elipses que possuem

eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

Haverá F_1 dois casos: $c \in P(x, y)$

1º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo x .

$y_0 \in C$

$P(x, y) \in c$

$$y_0 F C$$

$$1 c c F_2$$

$$O x_0 x$$

Sendo $C(x, y)$ o centro da elipse, tem-se:

$$O x x_0$$

$$F(x, y + c) \text{ e } F(x, y - c)$$

Sendo $C(x, y)$ o centro da elipse, tem-se: Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da elipse, pode-se escrever:

$$F(x - c, y) \text{ e } F(x + c, y) \quad PF_1 + PF_2 = 2a$$

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da elipse, pode-se escrever:

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fazendo-se $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, vem:

$$\begin{aligned} &^1(X + c)^2 + Y^2 + ^1(X - c)^2 + Y^2 = 2a \Rightarrow \\ &x y \text{ Caso particular: } C(0, 0) \Rightarrow + = 1 \quad b_2 \quad a_2^{-1} \\ &(X + c)^2 + Y^2 = 2a - ^1(X - c)^2 + Y^2 \end{aligned}$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} X_2 + 2Xc + c_2 + Y_2 &= 4a_2 - 4a^1(X - c)^2 + Y^2 + X_2 - \\ 2Xc + c_2 + Y_2 \end{aligned} \quad \text{EXERCÍCIO RESOLVIDO}$$

Simplificando-se e isolando-se o radical, tem-se:

01. Na figura a seguir, o ponto **P** pertence à elipse de focos

$$4a^1(X - c)^2 + Y^2 = 4a_2 F - 4Xc_1 \text{ e } F_2. \text{ Dar a equação reduzida da elipse.}$$

Dividindo-se por 4 e elevando-se ao quadrado, tem-se: $y \left(12 \right) P 4, \left| \left| 5 \right| \right)$

$$a_2X_2 - 2Xa_2c + a_2c_2 + a_2Y_2 = a_4 - 2Xa_2c + X_2c_2$$

Agrupando-se, tem-se:

$$(a F (-3, 0) O F (3, 0) \quad _{12} X_2 - c_2) X_2 + a_2 Y_2 = a_2 (a_2 - c_2)$$

Como $a_2 - c_2 = b_2$, a equação fica:

$$b_2X_2 + a_2Y_2 = a_2b_2$$

Resolução

Dividindo-se ambos os membros por a_2b_2 : O centro **C** da elipse é o ponto médio de F_1F_2 .

$$X_2 Y_2 \text{ Logo, } C(0, 0). = 1_2 + _2 a b y$$

Como $X = x - x_P$ e $Y = y - y_P$, tem-se: $_{00}$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

52 Coleção Estudo

Cônicas

Sendo $2a$ a medida do eixo maior, então $2a = PF_1 + PF_2$,

ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

ou seja:

i) A hipérbole possui dois eixos de simetria AA' e BB' .

$2a = (4 - 3) \cdot 2 = 2$ e $2b = (5 - 3) \cdot 2 = 4$ são perpendiculares em C , ponto médio de AA' e BB' .

$|0 - 4| = 4$ e $|3 - 5| = 2$ são os eixos da hipérbole.

real (ou transverso)._{1 2}

$2a = 144 - 37 = 107 \Rightarrow a = \frac{107}{2}$ é chamado centro da hipérbole. $b^2 = 144 - 107 = 37$ é chamado eixo imaginário._{1 2}

$$25 - 5 = 20$$

H

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

Sendo **b** a medida do semieixo menor, tem-se:

$$y^2 - \frac{x^2}{25} = 1$$

B₂

$$b = 5$$

F ii) O eixo real A A tem medida 2a. De fato: $C_1 F_2 = 13$, $F_2 A = 3$

$$A \in H \Leftrightarrow A F_1 - A F_2 = 2a \quad (1)$$

Mas, $A F_1 = A F_2$ (simetria). (2) Substituindo (2) em (1), temos:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Portanto, a equação da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

HIPÉRBOLE $F_1 F_2 A_1 A_2$

Considerem-se num plano α , dois pontos fixos e distintos

F_1 e F_2 , e seja $2c$ a distância entre eles. Uma hipérbole H

é o conjunto dos pontos de α cuja diferença, em valor

absoluto, das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante $2a$ **iii)**

O ponto B é tal que os segmentos BA_1 e BA_2 têm $BA_1 - BA_2 = 2a$ menor que $2c$. medida c .

iv) Relação fundamental:

Se $BA_1 - BA_2 = 2a$, então $BC = b$.

H

$F_1 F_2 c b$

$A_1 C a A_2$

$2c$

F e F : focos da hipérbole. _{1 2}

Do triângulo CB A , tem-se: _{1 2}

$FF = 2c$: distância focal. _{1 2}



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Em símbolos: $P \in H \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$ _{1 2}

Editora Bernoulli **53**

Frente E Módulo 13

v) Chama-se excentricidade da hipérbole o número e, Simplificando-se e isolando-se o radical:

$$\text{tal que: } \pm 4a (Xc -) + Y_2^2 = 4a^2 - 4Xc$$



$e = \frac{c}{a}$ Dividindo-se por a e elevando-se ao quadrado,
tem-se: ($e > 1$)

a

$$a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 - 2Xa^2c + X^2c^2$$

OBSERVAÇÃO Agrupando-se, tem-se:

Hipérbole equilátera é aquela em que $a = b$.

Sua $(c_2 - a_2)X_2 - a_2Y_2 = a_2(c_2 - a_2)$

excentricidade é $\sqrt{2}$. Substituindo $c_2 - a_2 = b_2$,
tem-se a equação:

$$b_2X_2 - a_2Y_2 = a_2b_2$$

EQUAÇÃO REDUZIDA DA Dividindo-se
ambos os membros por a_2b_2 :

HIPÉRBOLE $X_2 Y_2 -$

$$a_2 b_2 = 1$$

Serão estudadas as equações das hipérboles que
possuem Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, tem-se: $x_0 = 0$

eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.
Haverá



dois casos: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **1º caso:** O eixo
real é paralelo ao eixo x . $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ **2º caso:** O eixo

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, tem-se: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $F(x-c, y)$ e $F(x+c, y)$

2º caso: O eixo real é paralelo ao eixo y .

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, tem-se:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

$$F_1(x_0, y_0+c) \text{ e } F_2(x_0, y_0-c)$$

$P(x, y)$

$$O(x_0, y_0) \text{ e } C(x_0, y_0)$$

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da hipérbole, pode-se escrever:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} - \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Fazendo-se $x - x = X$ e $y - y = Y$, vem: Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da hipérbole, pode-se escrever: 00

$$(X c +) + Y_2 - (X c -)_2 + Y_{212} = 2 a$$

$$_2 |PF - PF| = 2a$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

Eliminando-se o módulo, tem-se:



$$_2 (y y -)_2 (x x_0 -)_2 X c +) + Y = (X c -) + Y \pm 2 a - 0 = 1 a_2 b_2$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$X_2 + 2Xc + c_2 + Y_2 = X_2 - 2Xc + c_2 + Y_2 \pm 4a (X c -)_2 + Y_2 + 4a_2$$

Caso particular: $y_2 x_2 C(0, 0) \Rightarrow = 1_2$
 $-_2 a b$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

PARÁBOLA

02. Na figura a seguir, o ponto P pertence à hipérbole de Considerem-se, num plano α , uma reta d e um ponto fixo F

focos F_1 e F_2 . Dar a equação reduzida da hipérbole. não pertencente a d . Uma parábola P é o conjunto dos

y pontos de α que equidistam de F e d .

H

$P(-5, 4)$

P'

$F'VF$ e

$F_1(-5, 0)$ $F_2(5, 0)$

d P

F: foco da parábola.

d: diretriz da parábola.

Em símbolos: $P \in P \Leftrightarrow PF = PP'$

Resolução:

O centro **C** da hipérbole é o ponto médio de FF' .

ELEMENTOS DA PARÁBOLA

Logo, $C(0, 0)$. A parábola possui um eixo de simetria **e**, passando por **F**

e perpendicular à diretriz **d**.

Sendo $2a$ a medida do eixo real, tem-se $2a = |PF - PF'|$. **V** é chamado vértice da parábola.

ou seja: **MATEMÁTICA** $FF' = p$ é chamado parâmetro da parábola.

$$2a = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot p \cdot 2 \cdot FV = VF' = (\text{pois } V \text{ equidista de } F \text{ e } d). 5 + 5) + (40 -) - (5 - 5) + (40 -) \Rightarrow 2$$

$$2a = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 5 + 4 - 0 + 4$$

$$\Rightarrow 2a = 70 \Rightarrow \text{EQUAÇÃO REDUZIDA}$$

$$\text{DA ()}_{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$2a = |6 - 4| \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \quad \text{PARÁBOLA}$$

Serão estudadas as equações das parábolas que possuem

Sendo **b** a medida do semieixo imaginário, tem-se: eixos de simetria paralelos a um dos eixos coordenados.

Haverá
dois
casos:

H

1º caso: O eixo de simetria é paralelo ao eixo **x**.

b 15 i) Concavidade para a direita:

y d

P' P(x, y)

1

y V e

o ! " # # \$ # ! " # # \$ # F' F

p p 2 2

O x0 x

$$c_2 = a_2 + b_2 \Rightarrow b_2 = c_2 - a_2 \Rightarrow P$$

$b = \left(\frac{2}{2} \right)$ Sendo $V(x, y)$ o vértice da parábola e p o parâmetro, $\frac{1}{5} \Rightarrow b_2 = 4 \Rightarrow b = 200$ tem-se:

Portanto, a equação da hipérbole é $x^2 - 2y^2 = p$

1. $F(x, y)$ e (d) $x = x - \left(\frac{0}{0} \right) \frac{2}{2} \left(\frac{0}{4} \right) \frac{2}{2}$

Editora Bernoulli 55

Frente E Módulo 13

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola, pode-se **EXERCÍCIO RESOLVIDO** escrever:

$PF = PP'$, em que $P'(x, y)$, ou seja: **03.** $\left(\frac{p}{2} \right)$ Dar a equação reduzida da parábola com vértice $(0, 0)$ e

$$2 \left(\frac{p}{2} \right)$$

foco
(1,
0).

$$\left(\frac{2}{2} p \right) \left(\frac{p}{2} \right) \left(\frac{p}{2} \right) \left(\frac{p}{2} \right)$$

$$\left| \begin{matrix} x & x & 2 & 2 \\ - & - & + & - \end{matrix} \right| = - + \left| \begin{matrix} | & | \\ | & | \end{matrix} \right| + -$$

$$\left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right) p_{000} y y x x y y \text{ Resolução:}$$

Fazendo-se $x - x^2 = X$ e $y - y^2 = Y$, vem: $0 = d(F, V) = 1$
 $\Rightarrow p = 2_0$

Como a concavidade é para a direita, temos:

$$\left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ p & \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} | \\ p \end{matrix} \right)$$

$$\left| \begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ X & - & | & + \end{matrix} \right| + Y = \left| \begin{matrix} X & + & | & + \end{matrix} \right| + 0 y = 2.2x$$

$$\Rightarrow y = 4x \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

2º caso: O eixo de simetria é paralelo ao eixo y .

$$X p_2 p_{22} p p - 2. X + + Y_2 = X_2 + 2. X + i)$$

Concavidade para cima: $2 \ 4 \ 2 \ 4$

Como $X = x - x^2$ $Y_2 = 2pX \# p P(x, y)^2$ e $Y = y - y^2$,
 tem-se: $0_0 ! " \# \# \$ y_0 p$ Simplificando, fica: $y \text{ e } P \# V$



$$(y - y^2) d_2 2 = 2p(x - x^2) ! " \# \# \$ 0_0 F' P'$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow y_2 O_{x_0 x} = 2px$

Sendo $V(x, y)$ o vértice da parábola e p o parâmetro, 00

ii) Concavidade para a esquerda: tem-se:

$$y \left(p \right) p F d x y , \left| e (d) y = y - 00 + \left| 0 \right. \right. \\ 2 \left. \right) 2 P' P(x, y)$$

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola, pode-se

$$y V \text{ e escrever: } 0 \$ \# ! " \# \# \$ \# ! " \# \# F F' p p \left(p \right. \\ \left. \right) 2 2 P F = P P', \text{ em que } P' x y , \left| 0 - \left| \left(2 \right) 0 \right. \right. \\ x_0 x$$

P E, com procedimento análogo ao inicial, chega-se a:

Sendo $V(x, y)$ o vértice da parábola e p o parâmetro, $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

tem-se:

$$F \left(p \right) p \text{ Caso particular: } V(0, 0) \Rightarrow x_2 \\ = 2py x \left| - , y \left| e (d) x = x + 000 \left(2 \right) \right. \right. \\ 2$$

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola, pode-se ii) Concavidade para baixo: escrever:

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a: $PF = PP'$, em que $P' \left(y \text{ e } p \right) x + , y$
 $\left[\left[0 F' P' d 2 \right] \right] ! " \# \# \$ p \# 2 V y_0 ! " \# \# \$ p P(x, y) \# 2 (y - y_0)$

$$y^2 = -2p(x - x_0) \quad \text{ou} \quad x^2 = 2p(y - y_0)$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow y^2 = -2px$

56 Coleção Estudo

Cônicas

Sendo $V(x, y)$ o vértice da parábola e p o parâmetro,

02. (UNIRIO-RJ) A área do triângulo PF_1F_2 , em que $P(2, -8)$ é um ponto da

tem-se: $x^2 + y^2 = 1$ e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, a distância entre os pontos P e F_1 é igual a $\frac{1}{2}$.

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola, pode-se afirmar que

escrever: B) 20

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a: $PF = PP'$, em que P' é o ponto da parábola tal que $PP' \perp$ à tangente em P . A distância entre os pontos P e P' é igual a $\frac{1}{2}$.



$$(x - x_0)_2 = -2p(y - y_0)$$

03. (C e s e s p - P E) D a d a a e l i p s e d e e q u a ç ã o

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow x_2 = -2py$ $25x_2 + 9y_2 - 90y = 0$, assinale a alternativa que nos

indica **CORRETAMENTE** as coordenadas do centro, dos

04. Dar a equação reduzida da parábola com vértice $(0, 0)$ e

focos, as medidas do eixo maior e menor e a distância

foco $(0, -2)$.

focal, respectivamente.

Resolução:

p A) $C(0, 0)$, $F(0, -4)$, $F(0, 4)$, 10 , 6 , 8 _{1 2}

$$= d(F, V) = 2 \Rightarrow p = 4$$

2 B) $C(0, 5)$, $F_1(0, 1)$, $F_2(0, 5)$, 4 , 8 , 6

Como a concavidade é para baixo, temos:

C) $C(3, 0)$, $F_1(1, 0)$, $F_2(5, 0)$, 10 , 6 , 3

$$x_2 = -2.4y \Rightarrow x_2 = -8y$$

D) $C(5, 0)$, $F(1, 0)$, $F(9, 0)$, 6 , 8 , 10 _{1 2}

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO E) $C(0, 5)$, $F(0, 1)$, $F(0, 9)$, 10 , 6 , 8 _{1 2}

MATEMÁTICA

04. (UFJF-MG) Considere as afirmativas:

01. (UFTM-MG-2007) Considere um corpo celeste (hipotético) I. As retas de equações $3x - 2y - 5 = 0$ e $3x - 2y = 0$

que descreve uma órbita elíptica ao redor do Sol, e que são paralelas;

o Sol esteja num foco da elipse. Quando o corpo celeste $x_2 y_2$ II. A equação $+ = 1$ representa uma hipérbole; encontra-se no vértice A_2 da elipse da figura, sua distância $5 \cdot 2$

ao Sol é de 0,808. Sabendo-se que F_1 e F_2 são os focos da $1 \cdot 2$ III. A equação $4y = x_2^2$ representa uma parábola.

elipse, e que a excentricidade de sua órbita é $e = 0,01$,

então a distância x ao Sol, quando o corpo encontra-se Assinale a alternativa **CORRETA**.

no vértice A_1 , é igual a A) Todas são verdadeiras.

B) Apenas II é falsa.

a a C) I e II são falsas. b

A $F_1 F_2$ D) II e III são verdadeiras. c c $A_1 \cdot 2$ Sol E) Todas são falsas.

05. (FUVEST-SP) O lugar geométrico dos pontos equidistantes

da reta $y = 0$ e da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ é

2a

A) uma reta.

A) 2,203 B) uma semirreta.

B) 0,792

C) uma circunferência.

C) 0,808

D) 1,616 D) uma elipse.

E) 0,533 E) uma parábola.

Editora Bernoulli 57

Frente E Módulo 13

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 05. (AFA-SP) A distância focal da elipse $x^2 + 16y^2 = 4$ é

A)
1

01. (UNESP) A equação da elipse de focos $F = (-2, 0)$, $F = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por

C)
15

A) $x^2 + y^2 = 1$ B) $x^2 + y^2 = 20$ C) $x^2 + y^2 = 10$ D) $x^2 + y^2 = 2$

06. (AFA-SP) Se $A(10, 0)$ e $B(-5, y)$ são pontos de uma elipse

B) $x^2 + y^2 = 1$

9 5 cujos focos são $F(-8, 0)$ e $F(8, 0)$, então o perímetro do triângulo ABC é

C) $x_2 y_2$ triângulo BF_1F_2 mede $+ = 1915$ A) 24

$x_2 y_2$ B) 26

D) $+ = 1$

6 15 C) 36

E) $x_2 y_2$ D) 38 $+ = 1425$

07. (UFPE) Considere, no sistema de coordenadas cartesianas

02. (Unicamp-SP) Os valores de $k \in \mathbb{R}$, para que o ponto ortogonais, as elipses

$A(-2, k)$ pertença à elipse $9x_2^2 + 4y_2^2 + 18x - 8y - 23 = 0$ são

$$33 = 1 x_2 y_2 x_2 y_2 + = 1 e +$$

A) $k = 1 \pm a b$

2

Assinale a alternativa que completa **CORRETAMENTE**

B) $k = 2 \pm$ a sentença: “Os pontos comuns às duas elipses dadas 3 3

2

C) $k = 3 \pm$ A) determinam apenas as retas $y = x$ ou $y = -x$.” ± 2
B) estão sobre a reta $y = x$.”

D) $k = 4 \pm$ C) estão sobre a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.” 2

D) satisfazem a equação $y^2 - x^2 = 0$.”

3 3

E) $k = -1 \pm$

2 E) determinam um quadrado de lados não paralelos aos eixos coordenados.”

03. (UFPE) Considere:

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 \}$$

(AFA-SP) A equação reduzida da cônica, representada no gráfico a seguir, é

Assinale a ÚNICA alternativa que, no plano xy ,

y

corresponde ao gráfico de S .

9

A) Uma circunferência de centro em $(1, 2)$.

B) Duas retas perpendiculares.

C) Uma elipse.

D) Uma parábola.

E) Um segmento de reta.

04. (UFC) O número de pontos de interseção das curvas $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ é igual a

B) $3_2 (x + 1) (y - 5)_2 C) + = 1 C) 4 16 9$

D) $5 (x + 1)_2 (y - 5)_2 D) + = 1 E) 6 9 16$

58 Coleção Estudo

Cônicas

09. (UFRN) A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$ **12.** (AFA-SP-2007) Considere as curvas, dadas pelas

representa uma equações

A) circunferência. (I) $16x^2 + 4y^2 + 128x - 24y + 228 = 0$

B) hipérbole. (II) $y = 7 - |x|$

(III) $y^2 - 6y - x + 5 = 0$

C) parábola.

Analise cada afirmação a seguir, classificando-a em

D) elipse.

verdadeira ou falsa.

E) reta. (01) O gráfico de (I) é representado por uma elipse, de

10. (II), por duas retas e de (III), por uma parábola. (UFV-MG-2007)
Um satélite descreve uma órbita

(02) O centro de (I) é um ponto de (II) e coincide com

elíptica em torno da Terra. Considerando a Terra como

o vértice de (III).

um ponto na origem do sistema de coordenadas,

a equação da órbita do satélite é dada por (04) A soma das coordenadas do foco de (III) é um

$9x_2 + 25y_2 - 288x - 1296 = 0$, em que x e y são número menor que -1 .

medidos em milhares de quilômetros. Nessas condições, π (08) A excentricidade de (I) é igual a $\cos . 6$ é **CORRETO** afirmar que

A soma dos itens **VERDADEIROS** é um número do

A) a menor distância do satélite à Terra é 16 000 km. intervalo

B) a distância do ponto (16, 12) da órbita do satélite à A) [8, 11]

Terra é 28 000 km.

B)
[4,
7]

C) a maior distância do satélite à Terra é 36 000 km.

C)
[12,
15]

D) a órbita do satélite passa pelo ponto de coordenadas

D)
[1,
3]

(0, 36).

3 MATEMÁTICA

E) a excentricidade da órbita do satélite é . **13.**

(Unicamp-SP) Assinale a **ÚNICA** alternativa que

corresponde à equação da parábola que tem por foco o

11. ponto $F(3, 0)$ e por diretriz a reta $x + 3 = 0$. (Unimontes-MG-2006) É um fato bem conhecido que,

em um espelho parabólico convexo, todo raio incidente, A) $y - 12x_2 = 0$

paralelo ao eixo de simetria, é refletido, passando pelo 2 B) $y - 12x = 0$ foco. Um raio incide em uma parábola de equação

x C) $y_2^2 - 9x = 0 = 4y$, paralelamente ao eixo dos y , conforme

o desenho. D) $y - 9x_2 = 0$

raio refletido raio incidente E) $y_2 + 12x = 0$

y

14. (UFPE) Um determinado fio é constituído de um material

$x_2 = 4y$ F que, quando preso a dois pontos distantes um do outro

de 20 m e ambos a 13 m do solo, toma a forma de uma

parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3 m do solo.

Assinale a alternativa que corresponde à parábola no

sistema de coordenadas cartesianas xOy , em que o eixo

O x Oy contém o ponto mais baixo do fio e o eixo Ox está 1

sobre
o
solo.

A equação da reta suporte do raio refletido é A) $y = x_2 + x + 3$

A) $-3y + 4x + 4 = 0$ B) $10y = -x_2 + 30$

B) $4x - 3y - 4 = 0$ C) $y = x_2 + 30$

C) $3x + 4y - 4 = 0$ D) $5y = x^2 + 15$

D) $-4x - 3y - 4 = 0$ E) $10y = x^2 + 30$

Frente E Módulo 13

15. (UFF-RJ) Na parede retangular de um palácio renascentista, **18.** (EN-RJ) A equação da parábola, cujo foco é o ponto $(1, 4)$

há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, e cuja diretriz é a reta $y = 3$, é

uma estreita faixa reta, conforme a figura. 2 A) $y = x - 2x + 4$

faixa

vitral 2 x B) $y = -x^2 + x - 8$

C)
 $y = -x + 4$

2

Essa parede foi ornamentada com um elemento 2 x x

D)
 $y = -x + 2$

decorativo em forma de uma curva, que tem a seguinte 2 2

característica: cada ponto da curva está situado a igual E) $x = y^2 - y + 4$

distância do centro do vitral e da faixa. Pode-se afirmar

que o elemento decorativo tem a forma de um arco

19. (AFA-SP) O parâmetro da parábola que passa pelo ponto

A) de elipse. $P(6, 2)$ e cujo vértice $V(3, 0)$ é o seu ponto de tangência

com o eixo das abscissas é

B) de hipérbole.

C) de parábola. A) 9

5

D) de circunferência. 9 B) 4 E) de senoide.

C)
3

16. (Cesgranrio) Uma montagem comum em laboratórios 9 D) escolares de Ciências é constituída por um plano 2

inclinado, de altura aproximadamente igual a 40 cm,

com 4 canaletas paralelas e apoiado em uma mesa,

20. (UFF-RJ) Uma reta r é paralela ao eixo x e contém a

forrada de feltro, cuja borda é curvilínea. Sobre a mesa, interseção das parábolas $y = (x - 1)^2$ e $y = (x - 5)^2$.

há um ponto marcado no qual se coloca uma bola de A equação de r é

gude. A experiência consiste em largar, do alto do plano

$$\begin{aligned} &A) \\ &x \\ &= \\ &3 \end{aligned}$$

inclinado, outra bola de gude, a qual, depois de rolar por uma das canaletas, cai na mesa e colide sucessivamente B) $y = 4$ com a borda da mesa e com a primeira bola. A borda da

$$\begin{aligned} &C) \\ &y \\ &= \\ &3x \end{aligned}$$

mesa tem a forma de um arco de

$$\begin{aligned} &D) \\ &x \\ &= \\ &4y \end{aligned}$$

A) elipse, e o ponto marcado é um de seus focos.

E)
y
=

B) parábola, e o ponto marcado é seu foco. 3

C) hipérbole, e o ponto marcado é um de seus focos.

D) hipérbole, e o ponto marcado é seu centro.

GABARITO

E) circunferência, e o ponto marcado é seu centro. **Fixação**

17. (Cesesp-PE) Considere a parábola

01. B 02. E 03. E 04. B 05. E

$$2y - x^2 - 10x + 2 = 0$$

Assinale a **ÚNICA** alternativa que representa as **Propostos**

coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

A) $\left(\begin{array}{l} 01. B \\ 06. C \\ 11. C \\ 16. B \\ 27 \end{array} \right) - 5, -$ e $y = 12$ || || 2 |) 02. A
07. D 12. A 17. B

B) $(-5, -13)$ e $y = -14$

03. C 08. D 13. B 18. C

C) $(-2, 4)$ e $y = 14$

04. C 09. D 14. E 19. B

D) $(-5, -13)$ e $y = 12$

05. C 10. C 15. C 20. B

E) $(-5, -13)$ e $y = -12$

60 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Números complexos: 14 E forma algébrica

INTRODUÇÃO Se a parte real de z é igual a zero e a parte imaginária é

não nula, então z é um número imaginário puro.

Ao resolvermos a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, encontramos

$x = 2 \pm \sqrt{-1}$, que não são soluções reais. Euler, em 1777, z é imaginário puro $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ chamou $\sqrt{-1}$ de i (unidade imaginária), e Gauss, em 1800, associou a cada símbolo $a + bi$ o par ordenado (a, b) . Esse par

recebe o nome de número complexo e é representado

por

um ponto no plano. **POTÊNCIAS DE i**
COM

Im EXPOENTE NATURAL

$b \in \mathbb{P}(a, b)$

Define-se potência de i com expoente natural da
mesma

maneira que se define potência de um número real.

O a Re Assim:

O número complexo $(0, 1)$ é chamado unidade
imaginária

$$i_0 = 1 \quad i_4 = (i_2)_2 = (-1)_2 = 1 \quad i_8 = (i_4)_2 = 1_2 = 1$$

e será indicado por i , ou seja, $(0, 1) = i$.

Propriedade fundamental $i_1 = i \quad i_5 = i_4.i =$
 $1.i = i \quad i_9 = i_8.i = 1.i = i$



$$i = -1$$

$$i^2 i^2 = i \cdot i = -1 \quad i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1 \quad i^{10} = (i^5)^2 = i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \quad i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i \quad i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

FORMA ALGÉBRICA DE UM

No quadro anterior, verificamos que toda potência de i ,

NÚMERO COMPLEXO com expoente natural n , é igual a um dos quatro valores:

$$1, i, -1, -i.$$

Todo número complexo $z = (a, b)$, com a e b reais, pode

Como esse ciclo se repete de quatro em quatro termos, ser escrito na forma $z = a + bi$, chamada de forma algébrica. para calcularmos uma potência i_n , procedemos da seguinte

O número real maneira: dividimos n por 4 e tomamos o resto r , fazendo a é chamado de parte real de z e é indicado

por $\text{Re}(z)$. O número real $i_n = i_r$. b é chamado de parte imaginária

de z e é indicado por $\text{Im}(z)$. **Exemplo**

Se a parte imaginária de z é igual a zero, então z é um número real. Calcular i_{70} .

número real. 70 4

2 17

z é real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$

Assim, $i_{70} = i_2 = -1$.

Editora Bernoulli 61

Frente E Módulo 14

IGUALDADE ENTRE NÚMEROS
Propriedades

COMPLEXOS = i) $z = z \vee$ $z + z_{12} = z_1 + z_2$

Definição ii) $z = z \Leftrightarrow z \in \mathbf{vi}$ $z . z_{12} = z_1 . z_2$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \text{ iii) } z + z = 2 \operatorname{Re}(z) \quad |z| = 1, (z \neq 0) \quad \text{vii) } \left(\frac{z}{z} \right)^2 = 1$$

$$\forall \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R} \quad \text{iv) } z - z = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \text{viii) } (z^n)^n = (z^n)^n, n \in \mathbb{Z}$$

Exemplo

Determinar **a** e **b** reais, de modo que

$$(a - b) + 3i = 2 + ai. \quad \text{OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS}$$

Resolução: E PROPRIEDADES

Pela definição de igualdade, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = 2 \\ 3 = a \end{array} \right. \quad \text{Adição} \Rightarrow b = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 = a \\ 3 = a \end{array} \right.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

NÚMEROS COMPLEXOS

Subtração

OPOSTOS E CONJUGADOS

Definição de opostos $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo



O oposto de um número complexo $z = a + bi$ é Dados os números

o número indicado por $-z$, tal que $-z = -a - bi$, $z = 3 + i$, $z = -1 + 4i$, calcular $_{12}$

$\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

A) $z + z = z + z$. **B)** $z - z = z - z$. $_{1212}$

Resolução

Assim:

$$\textbf{A)} \quad z + z = (3 + i) + (-1 + 4i) = (3 - 1) + (1 + 4)i \Rightarrow_{12}$$

$$\textbf{i)} \quad \text{O oposto de } z = 1 - i \text{ é } -z = -1 + i. \quad z + z = 2 + 5i_{12}$$

$$\textbf{ii)} \quad \text{O oposto de } z = -2i \text{ é } -z = 2i. \quad \textbf{B)} \quad z - z = z + (-z) = (3 + i) + (1 - 4i) \Rightarrow_{1212}$$

$$z - z = (3 + 1) + (1 - 4)i \Rightarrow_{12}$$

Definição de conjugados $z - \bar{z} = 4 - 3i$

Chama-se conjugado do número complexo

Multiplicação

$z = a + bi$, $\{a, b\}$ Sejam $z = a + bi$ e $\bar{z} = c + di$, aplicando a propriedade $\subset$, o número indicado por z , tal

que distributiva, determinamos $z \cdot \bar{z} = a - bi$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi$$

Assim: Como $i^2 = -1$, temos:

i) O conjugado de $z = 1 - i$ é $\bar{z} = 1 + i$. $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd \Rightarrow$

ii) O conjugado de $z = -2i$ é $\bar{z} = 2i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

iii) O conjugado de $z = 3 + i$ é $\bar{z} = 3 - i$.

62 Coleção Estudo

Números complexos: forma algébrica

Exemplo EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Dados os números complexos

01. $z = 1 + i$ (UFV-MG) Seja o número complexo $z = 1 + i$, então z^{25}
 $= 3 + i$ e $\bar{z} = -1 + 4i$, calcular $z \cdot \bar{z}$.

é
igual
a

Resolução: A) -1 B) 1 C) $2i$ D) $-i$ E) i

$z \cdot \bar{z} = (1 + i) \cdot (-1 + 4i) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (4i) + i \cdot (-1) + i \cdot (4i) \Rightarrow$
02. (UFU-MG) Se $S = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2003}$,
 em que

$z \cdot \bar{z} = -3 + 12i - i - 4 \Rightarrow = -1$, então S é igual a

A) 0 B) -1 C) i D) $i - 1$

$$z \cdot z = -7 + 11i$$

03. (UFLA-MG-2006) Determine os valores de x , de modo que

Divisão o número complexo $z = 2 + (x - 4i)(2 + xi)$ seja real.

$$A) \pm 2^1 \quad B) \pm 1^2 \quad C) \pm 2^2 \quad D) \pm 1^1$$

Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$

3

e a divisão z/w , o número z , tal que $z = 1$ é chamado z

quociente de z por z . **04.** (UFRGS) $(1 + i)^{15}$ é igual a

$$A) 64(1 + i) \quad B) 256(-1 + i)$$

Obtém-se a forma algébrica de z do seguinte modo:

$$B) 128(1 - i) \quad C) 256(1 + i)$$

i) Toma-se o conjugado de z , isto é, $\bar{z} = c - di$.

ii) Multiplicam-se o numerador e o denominador de z por $1 + i$.

05. (UNIRIO-RJ) Se $z = a + bi$, em que $i = \sqrt{-1}$, então z^2

$1 + i$ por z o valor de $a + b$ é

MATEMÁTICA

Assim: 1 3 A) 1 B) C) 2 D) -1 E) 2 2

$$z = a + bi + c + di \quad ac + bdi - + -_2 \Rightarrow$$

$$= + \cdot - = c + di + c + di + c + di -_2_2_2 c - d + i$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS



$$z = a + bi + ac + bd + (bc + ad -)$$

01. (UEL-PR) Sejam os números

complexos $w = (x - 1) + 2i$ e $v = + i + c + di +_2_2_2 c + d + c + d + v = 2x + (y - 3)i$, em que $x, y \in \mathbb{R}$. Se $w = v$, então

A) $x + y = 4$ D) $x = 2y$

Exemplo B) $xy = 5$ E) $y = 2x$

C) $x - y = -4$

Dados os números complexos

02. (Mackenzie-SP) Se $u = 4 + 3i$ e $v = 5 - 2i$, então uv é

$z = 3 + i$ e $z = -1 + 4i$, calcular $z_1 \cdot z_2$ A) $20 - 6i$ D) $14 - 7i$ z_2

B) $14 + 7i$ E) $26 + 7i$

Resolução:

C)

$z^3 + i^3 + i^1 4i - - 3 12i i - - 4 i_{21} = = \cdot$
 $- - = \Rightarrow$ **03.** (UFPA) Qual o valor de m para que o produto
 $(2 + mi)(3 + i) z - 1 4 + i - 1 4 + i - - 1 4 i ($
 $- - 1)_2 - 4_{22} i_2$ seja um imaginário puro?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

$z_1 - - 3 13i + 4 1 13 - i = = \Rightarrow z 1 16 17_2 +$ **04.**
 (PUC-SP) Se $f(z) = z^2 - z + 1$, então $f(1 - i)$ é igual a

A) i D) $i + 1$

$z_1 1 13$ B) $-i + 1$ E) $-i = - i z 17 17_2$ C) $i - 1$

Editora Bernoulli **63**

Frente E Módulo 14

05. (UFRN) Se $z = 4 + 2i$, então $z - 3z$ vale **13.** (UFPR) Dados os
 números complexos $z_1 = 4 + 13i$ e

A) $6 + i z_1$ D) $1 - 8i z = 1 + 3i$, efetuando , obtemos $z z$ B) $1 + 8i$
 E) $12 + 6i_2$

C) $-8 + 8i$ A) $8 3 2 - + i$

06. (UFS) Se o número complexo z é tal que $z = 3 - 2i$, então $5 + 13i(z)^2$ é igual a $(2 + 37 - 3)$ A) $5D) 9 + 4i$ C) $+ i 5 5$ B) $5 - 6i$ E) $13 + 12i$ (C) $5 + 12i 4 3 3 + 3 12 -$) D) $+ i 10 10$

07. (UFSM-RS) Sabendo que x é um número real e que a parte $3 5 3$ E) $+ i 2 + i 8 8$ imaginária do número complexo é zero, então x é $x + 2 i$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) 4 **14.** (Mackenzie-SP)

Seja o número complexo $z =$, então $1 + i$ **08.** z_1^{980} vale (PUC-SP) Quantos são os números complexos z que

satisfazem as condições $z^2 = 1$ e $z - z = 0$? A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) $-2i$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. (UNESP) Se $z = (2 + i)(1 + i)i$, então o conjugado de z

09. (PUC-SP) O número complexo z que verifica a equação será dado por

$iz + 2z + i - 1 = 0$ é A) $-3 - i$

A) $-1 + 2i$ D) $1 + i$ B) $1 - 3i$

B) $-1 + i 1 3$ C) $3 - i$ E) $- i 5 5$ D) $-3 + i$ C) $1 - i$

E)
3
+
i

10. (UFBA) Sendo $z = 2 - i$, o inverso de z^2 é

A) $5/4 + i/3$ 4 D) $+ i/41$ 25 25 **GABARITO**

B) $2 + i/3$ 4 E) $- i/5$ 25 25 **Fixação**

C) $- 4/3 + i/01$. E

25 02. B 03. A 04. B 05. A 25

11. (PUC Rio) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e

Propostos

5

$w =$. Então,

$2 + i/01$. A 09. E

A) $z = -w$ D) $z = 2w$

B) $z = w$ 02. E 10. D E) $z = w$

C) $z = -w$ 03. B 11. E

12. 1 3 $+ i/04$. E 12. A (PUC-SP) O conjugado do número complexo é $2 - i$

A) $- - 1/7$ 05. C 13. D $i - 1/7 + i$ D) $5/5$ 06. C 14. A

B) $1 - i$ 1 + i E) 07. E 15. A 5 5

C) $12 + i$ 08. C

7

64 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Números complexos: 15 E
forma trigonométrica

PLANO DE ARGAND-GAUSS

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo
sombreado,

tem-se:



Considere o plano determinado por um sistema de
eixos

retangulares xOy . $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

y

Essa distância ρ é chamada módulo de um número

$$P(a, b)$$

complexo e é representada por $|z|$. Assim, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplos

Ex 1º) Calcular o módulo de $z = -5 + 12i$.

Seja a correspondência biunívoca que associa a cada ponto **Resolução:**

$P(a, b)$ desse plano o número complexo $z = a + bi$, com

a Parte real: $a = -5$ e parte imaginária: $b = 12$. e **b** reais, em que a abscissa **a** representa a parte real e

a ordenada **b**, a parte imaginária de **z**. Então, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Nessas condições, o ponto **P** é chamado afixo do número Portanto, $|z| = 13$.

complexo **z**. Os eixos **Ox** e **Oy** são chamados de eixo real (Re) e de eixo imaginário (Im), respectivamente.

2º) Calcular o módulo de $z = 3 - 2i$.

Ox = eixo real (Re); **Resolução:**

Oy = eixo imaginário (Im); $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ **P** = afixo de **z**.

Assim, o número complexo $z = 3 + 2i$ tem afixo (3, 2). **Propriedades**

Im

2 Dados os números complexos $z = 3 + 2i$, z_1 e z_2 , tem-se que:

$z_1 z_2$

$$\text{i) } |z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{iv) } |z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$$

O 3 Re

$$\text{v) } z \bar{z} = |z|^2$$

MÓDULO DE UM NÚMERO $z_2 z_1$ **ii)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$ $1 = 1, (z_2 \neq 0)$ 2

COMPLEXO **iii)** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ **vi)** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Considere, no plano de Argand-Gauss, o afixo $P(a, b)$ do **Exemplo**

número complexo $z = a + bi$, e seja ρ a distância do ponto **P**

$$\text{Calcular } |(3 + 4i)(5 - 12i)|.$$

à origem **O** do sistema.

Im

Pela propriedade iv, tem-se

$$|P(z)| = |(3 + 4i)(5 - 12i)| = |3 + 4i| \cdot |5 - 12i| \Rightarrow$$

$$\rho |(3 + 4i)(5 - 12i)| = 3^2 + 4^2 \cdot 5^2 + (-12)^2 \Rightarrow$$

$$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = 5 \cdot 13 \Rightarrow$$

$$\text{O a Re } |(3 + 4i)(5 - 12i)| = 65$$

Editora Bernoulli 65

Frente E Módulo 15

EXERCÍCIO RESOLVIDO Im

01. $P_2 P(1, 13)$ Dar o lugar geométrico dos afijos dos números complexos $z \in \mathbb{C}$

tais que $|z - 1 + i| \leq 2$.

Resolução: 2

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|z - 1 + i| \leq 2 \Leftrightarrow |a + bi - 1 + i| \leq 2 \Leftrightarrow \Phi_{P_1}$$

$$|a - 1 + (b + 1)i| \leq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \leq 2 \text{ O 1 Re}$$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, tem-se:

$$(a - 1)^2 + (b + 1)^2 \leq 4 \quad (2) \text{ Assim:}$$

$$\text{Resposta: } \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = 2$$

O lugar geométrico é um círculo de centro $(1, -1)$ e raio 2. No triângulo retângulo sombreado, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{3} \right) \cos \phi &= \left| \frac{2}{3} \right| \pi \Rightarrow \phi = + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} \phi &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{3}$ Portanto, o argumento principal de $2z$ é $\phi = \frac{\pi}{3}$ ou 60° .

$$\phi = 60^\circ.$$

2º) Determinar o argumento principal do número

$$\begin{aligned} z &= -1 - i. \end{aligned}$$

ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

$$\phi$$

COMPLEXO

Seja $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, um número complexo

não nulo de módulo ρ , e seja **P** seu afixo no plano de Argand-Gauss. -1 $P(-1, -1)$

Im **Resolução:**

b $P(a, b)$ O argumento principal de $z = -1 - i$ é $5\pi/4$ ou 225° .

ρ

ϕ FORMA TRIGONOMÉTRICA DE

O a Re UM NÚMERO COMPLEXO

positivo Ox é chamado argumento principal do número O o ângulo de medida ϕ determinado por OP e pelo semieixo Ox . Seja um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$, $z \neq 0$, de módulo ρ e argumento ϕ . complexo z . Tem-se, ainda:

Tem-se:

$$a + bi = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\text{i) } \cos \phi = \frac{a}{\rho} \quad \text{ii) } \sin \phi = \frac{b}{\rho} \quad z = a + bi$$

As igualdades (i) e (ii) garantem a unicidade do argumento ϕ

principal, pois determinam o quadrante do ângulo ϕ .

ϕ

Exemplos

O a Re

1º) Determinar o argumento principal do número

$$\text{complexo } z = 1 + i\sqrt{3}. \quad \cos \phi = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos \phi$$

ρ **Resolução:** e

No complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$, tem-se: $\sin \phi = \frac{b}{\rho}$
 $\Rightarrow b = \rho \sin \phi$ parte real $a = 1$ e parte
 imaginária $b = \sqrt{3} \rho$

Então: $z = a + bi = \rho \cos \phi + i \rho \sin \phi \Rightarrow$

Resolução:

A forma $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ $\left[\left(\frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] z$
 $z = 3.2 \cos i \sin_{12} \left| \right| + \left| \right| + \left| \right| + \left| \right| \Rightarrow \left[\left(\frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] z$
 $\left| \right| \left| \right| \left| \right| \left| \right|$

$$z \cdot z = 6(\cos p + i \sin p) \Rightarrow_{12}$$



$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$z \cdot z = 6(-1 + i.0) \Rightarrow_{12}$$

é chamada forma trigonométrica ou forma polar do número $z \cdot z = -6_{12}$

complexo z .

Exemplo DIVISÃO

Escrever sob a forma trigonométrica o número complexo

$z = 2^1 3 + 2i$. Dados dois números complexos não nulos z e z , tais que $_{12}$

Resolução: $z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$ e $z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$. $_{11112222}$

A parte real de z é $a = 2^1 3$, e a parte imaginária é

$b = 2$. Assim:

$$\rho = |z| = a + b_2 = 2^3 + 2_2 = 4, \text{ e } z = (\rho \cos \phi + i \sin \phi) z_2 \phi_1 \phi_{22} \rho_{12}$$

Demonstração: $\phi = \left| \frac{z}{\rho} \right| \pi \Rightarrow \phi = \left| \frac{z}{\rho} (\cos \phi + i \sin \phi) \right|_1 \sin = \phi_1 = \phi$
 $= \left| z (\cos \phi + i \sin \phi) \right|_2 \rho \sin = \phi_2$

Portanto, a forma trigonométrica de z é: $\rho (\cos \phi + i \sin \phi)$

MATEMÁTICA $= \rho (\cos \phi + i \sin \phi) ((\cos \phi - i \sin \phi) \left| \frac{z}{\rho} \right|_2 \pi \pi) z = 4 \cos \left| \frac{z}{\rho} \right|_6 \rho$
 $(\cos \phi \cos \phi + \sin \phi \sin \phi) \phi \sin \phi + i (\cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) \phi \cos \phi$
 $= \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho^2$

MULTIPLICAÇÃO $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)]$
 $= \rho_1 \rho_2 [\cos (\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2)]$
 21 Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2 , tais que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos (\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2)) \text{ e } z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$$

Tem-se:



z POTENCIAÇÃO

$$z^n = [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] \rho^n$$



(1ª FÓRMULA DE MOIVRE)

Demonstração:

$$z \cdot z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi) \cdot \rho (\cos \phi + i \sin \phi) = \rho^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi + i 2 \sin \phi \cos \phi)$$

Calculando-se algumas potências de Considere o número complexo não nulo $z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$.
z, com expoentes

$$\rho \cdot \rho (\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi + i (\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi)) = \rho^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$$

naturais, tem-se:

$$\rho \cdot \rho [\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi + i (\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi)] = \rho^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$$

$$z_0 = 1 = \rho_0 (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\rho \cdot \rho [\cos (\phi + \phi) + i \sin (\phi + \phi)] = \rho^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$$

$$z_1 = z = \rho_1 (\cos \phi + i \sin \phi)$$

Exemplo $z_2 = z \cdot z = \rho_2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$

Sendo $z = \rho_1(\cos \phi + i \sin \phi)$ e $z = \rho_1(\cos \phi + i \sin \phi)$, $z_3 = z_2 \cdot z = \rho_3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi)$

calcular $z \cdot z \cdot z = z_4 = z_3 \cdot z = \rho_4(\cos 4\phi + i \sin 4\phi)$

Editora Bernoulli 67

Frente E Módulo 15

Pode-se generalizar os resultados anteriores através do De (II), temos $a = 0$ ou $b = 0$.

seguinte teorema. z Substituindo $b = 0$ em (I), obtemos $a = -9$.

nulo e Como, por hipótese, a é real, concluímos que não existe a , Sendo $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ um número complexo não

n um número inteiro qualquer, tem-se: z^n tal que $a = -9$.



$z^n = \rho_n[\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)]$ Substituindo $a = 0$ em (I), obtemos:

Exemplo $-b_2 = -9 \Rightarrow b = \pm 3$

Dado $z = 2 \left(\pi \pi \right)$ Logo, as raízes quadradas de -9 são números da forma $\cos + i \sin \left| \right|$, calcular z_4 .
 $\left(6 6 \right) a + bi$ com $a = 0$ e $b = \pm 3$, isto é, são os números

$3i$ e $-3i$.

Resolução:

$$z_4 = 2_4 \pi \pi \cos \left(\text{Resposta: } -3i, 3i \right) \\ \left| i + \sin \right| \Rightarrow 6 \left(6 \right)$$

$z \pi_4 \left(2 2\pi \right) 2^a$ FÓRMULA DE

MOIVRE $= 16 \cos + i \sin \Rightarrow \left| \right| \left| \right| 3 3 \left(\right)$ Dado o número complexo $z = \rho (\cos q + i \sin q)$, não nulo, $\left(\right) 1 3$ e o número natural $n \geq 2$, existem **n** raízes enésimas de z . $z_4 = 16 \left| - + i \right| \Rightarrow \left| 2 2 \right| \left(\theta \theta \right)$ Uma das raízes enésimas de z é $z = \rho \cos + i \sin_0 \left| \right|$. $z_4 = -8 + 8^1 3 i \left(n n \right)$

As demais raízes terão mesmo módulo $_n \rho$, e seus

RADICIAÇÃO argumentos formarão, com o argumento de z , uma $_0$

Sejam progressão aritmética de primeiro termo θ 2π e razão $. z$ um número complexo e n um

número natural n n

não nulo. Um número complexo ϕ é uma raiz enésima de z **Exemplo** se, e somente se, $\phi_n = z$. Calcular as raízes cúbicas de -27 .

Exemplos *Resolução:*

1º) $- + i$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\| - + i \| = 1$.
 $2^2 \left(1 \ 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} z = -27 \Leftrightarrow z = 27(\cos p + i \sin p) \right)$

$$2 \ 2 \mid_{\text{Im}}$$

$$1 \ 3 \begin{pmatrix} \\ 3 \end{pmatrix}$$

2º) $1 - \sqrt[3]{i}$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\left(1 - \sqrt[3]{i}\right)^3 = 1$

$$= 1.$$

$$2\ 2\mid\ 2\ 2\mid$$

$$\theta = \pi$$

OBSERVAÇÕES z

i) -27 O Re Um número complexo não nulo admite como raízes

enésimas n números distintos. Por exemplo, o número 1 admite como raízes cúbicas os três números:

ii) $-1, 3, 1, 3$ São três as raízes cúbicas de -27 .
 e $-1, 3, 1, 3$ Uma raiz é $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$\sqrt[3]{27} + i \Rightarrow \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ Só se usa o símbolo $\sqrt[n]{}$ para indicar raiz real de um

Exemplo número real. Para indicar as raízes enésimas de um $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$, deve-se escrever por extenso $\sqrt[n]{z}$ “raízes enésimas de z ”. Chamando as outras duas raízes de z e $\bar{z}$, temos: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$, $\sqrt[n]{\bar{z}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{-\theta}{n} + i \sin \frac{-\theta}{n} \right)$. Determinar as raízes quadradas de -9 .

Resolução: $\sqrt[2]{-9} = \sqrt[2]{9} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

Seja $a + bi$, com a e b reais, uma raiz quadrada de -9 .

Então:

Assim, por definição, deve-se ter:

$$(a + bi)^2 = -9 \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -9 \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = -9 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = -9 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = 9 \\ a = 0 \end{cases}$$

Representação geométrica 02. (UEL-PR) A potência $(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)^{601}$ é igual a

Os afixos das raízes cúbicas de -27 dividem a circunferência, A) $1 - i$ B) $1 + i$ C) $1 - i$ D) $1 + i$

2 2

de centro **O** e raio 3, em três partes congruentes, isto é, são

vértices de um triângulo equilátero. 1 1 B) $(-1 + i)$ E) $(1 - i)$

2 2

Im $3 - i$ C) $(1 + i)$ 2 2

03. (UFSM-RS-2006) Dado $z = x + yi$, um número complexo, -3 O Re as soluções da equação $|z - 2i| = 5$ são representadas graficamente por

A) uma reta que passa pela origem.

$3 - i$ B) uma circunferência com centro $(0, 2)$ e raio 5. 2 2

C) uma reta que passa por $(0, 2)$.

D) uma circunferência com centro $(2, 0)$ e raio 5.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM 04. (UNIRIO-RJ)

uma reta que passa por $(2, 0)$.

Seja o complexo $z = \rho(\cos q + i \cdot \sin q)$

escrito na forma trigonométrica. Então, $z \cdot z$ é

Resolver em a equação $z^2 - iz + 2 = 0$. A) 2ρ

B) $2\rho(\cos 2q - i \cdot \sin 2q)$

Resolução:

C)
 ρ^2

Temos $a = 1$, $b = -i$ e $c = 2$. D) $\rho^2(\cos q_2 + i \cdot \sin q_2)$

Logo, $\Delta = (-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -1 - 8 = -9$.

9. MATEMÁTICA

As raízes quadradas de 05. (UFU-MG) As representações gráficas dos números $\Delta = -9$ são $3i$ e $-3i$; logo:

$z_1 = \cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ$ e $z_2 = \cos 102^\circ + i \cdot \sin 102^\circ$,

$z_1 = 2i$ ou $z_2 = -i$ no plano complexo, correspondem a vértices consecutivos de um polígono regular inscrito em uma circunferência

Portanto, $S = \{-i, 2i\}$. com centro na origem. O número de lados desse polígono

A) 12 C) 5

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

B) 6 D) 10

01. (Mackenzie-SP) A forma trigonométrica do número

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

complexo $i - \sqrt{3}$ é

A) $2 \cdot \left(\pi \cdot \pi \right)$ 01. (UFC-2007) Ao dividir $(1 - \sqrt{3}i)$ por $(-1 + i)$, obtém-se $\left| \cos + i \sin \cdot \right|$
 $\left(\frac{3}{3} \right)$ um complexo de argumento igual a

B) $2 \cdot \left(\pi \cdot \pi \right)$ | A) $\pi \cos + i \sin \cdot 4$ |
 $\left(\frac{6}{6} \right)$

B)
5 π

C) $2 \cdot \left(\frac{2 \pi}{2} \cdot \frac{2 \pi}{2} \right)$ $\left| \cos + i \sin \cdot \right|$ $\left(\frac{3}{3} \right)$ 7π C) $12 \left(\frac{5 \pi}{5} \cdot \frac{5 \pi}{5} \right)$ D) $2 \cdot$
 $\left| \cos + i \sin \cdot \right|$ $\frac{3 \pi}{3}$ $\left(\frac{3}{3} \right)$ D) 4

E) $2 \cdot \left(\frac{5 \pi}{5} \cdot \frac{5 \pi}{5} \right)$ $\left| \cos + i \sin \cdot 11 \right| \pi$ E) $\left(\frac{6}{6} \right)$ 12

Frente E Módulo 15

02. (FGV-SP-2007) A figura indica a representação dos **05.** (UEG-2006) O conjunto dos números complexos que

números Z e Z no plano complexo. satisfazem a condição $|z - 3i| = |z - 2|$ é representado

Im no plano cartesiano por uma reta

A) cuja inclinação é positiva.

B) que contém a origem do sistema.

Z_2

C) que não intercepta o eixo real.

D) cuja inclinação é negativa.

O **06.** (FGV-SP) Admita que o centro do plano complexo

Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de

Se Z_1 ponteiros, como indica a figura. Z_2

$= a + bi$, então $a + b$ é igual a

A) $4(\text{Imaginário } 1 - i^3)$

B) $2(i^3 - 1)$

C) $2(1 + i^3)$

D) $8(\sqrt[3]{3} - 1)$

E) $4(\sqrt[3]{3} + 1)$

03. (UFRGS) O ângulo formado pelas representações

geométricas dos números complexos $z = \sqrt[3]{3} + i$ e z^4 é

A) π às 11h55min sua ponta estará sobre qual número 6 Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento,

complexo

B) π

4 A) $-1 + \sqrt[3]{3}i$

π B) $1 + \sqrt[3]{3}i$

C)

3 C) $1 - \sqrt[3]{3}i$

D) π D) $\sqrt[3]{3} - i$

2

E)
 $\sqrt[3]{3}$
+
 i

E) p

07. (FUVEST-SP) Entre os números complexos $z = a + bi$,

04. (UFPE) Considere o seguinte gráfico que representa o não nulos, que têm argumento igual a π , aquele cuja 4

número complexo $z = a + bi$. representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é

Im A) $1 + i$

z B) $1 - i$

C)
-1
+
i

6π D) $\sqrt{2} + 2i$

O E) $-\sqrt{2} + 2i$ Re

Sabendo-se que o segmento OZ mede duas unidades de **08.** (Cesgranrio) O conjunto dos pontos $z = x + yi$ do plano

comprimento, assinale a alternativa **CORRETA.** complexo que satisfazem $|z - 1|_2 = 2x$ e $y \geq 2$ é

A) $z = \sqrt{2} + i$ A) o conjunto vazio.

B) $z = \sqrt{3} + i$ B) uma região não limitada do plano.

C) $z = 1 + \sqrt{3}i$ C) todos os pontos $x + yi$ tais que $y \geq 2$.

D) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ D) uma reta.

E) $z = 1 - \sqrt{3}i$ E) diferente dos quatro anteriores.

70 Coleção Estudo

Números complexos: forma trigonométrica

09. (Cesgranrio-RJ) A representação geométrica dos números **11.** (Mackenzie-SP) Seja $t = 2 + 3i$ um número complexo. Se,

complexos z e w é a da figura.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leq 1\}$$

y

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi \text{ e } b \leq 3\}$$

w então, no plano de Argand-Gauss, $A \cap B$ é

z A) um conjunto vazio.

O x B) uma semicircunferência.

C) um semicírculo.

A representação geométrica **POSSÍVEL** para o produto zw é

A) D) uma circunferência. y

E) um círculo.

zw O x

12. (Cesgranrio) No plano complexo, o conjunto dos pontos

B) y $z = x + yi$, tais que $|z| \leq 1$ e $y \geq 0$, é

A) uma circunferência.

O x

zw B) um círculo.

C) y C) um quadrado centrado na origem.

zw

D) um semicírculo.

O x

E) um segmento de reta.

D) y zw

13. (PUC Minas) A forma trigonométrica do número complexo

A) $8.(\cos 30^\circ + i.\sin 30^\circ)$

E) y

B) $8.(\cos 45^\circ + i.\sin 45^\circ)$

zw O x C) $8.(\cos 60^\circ + i.\sin 60^\circ)$

D) $8.(\cos 120^\circ + i.\sin 120^\circ)$

10. E) $8.(\cos 150^\circ + i.\sin 150^\circ)$ (UFU-MG) Sejam z_1 e z_2 dois números complexos

representados geometricamente, na figura a seguir, pelos

pontos **14.** (UEBA) Na figura a seguir, o ponto **P** é o afixo do número **A** e **B**, respectivamente.

complexo
z.

y B

Im (z)

20° P A 1

30°

O O Re (z) x ¹ 3

Sabendo-se que $OA = 3$ cm e que $OB = 6$ cm, pode-se A forma trigonométrica de z_2 é

afirmar que

$$z_2 \text{ A) } 4.(\cos 15^\circ + i.\sin 15^\circ)$$

A) tem módulo igual a 2 cm.

$$z \text{ B) } 4.(\cos 60^\circ + i.\sin 60^\circ)$$

B) $z_1 + z_2$ tem módulo igual a 9 cm. C) $2.(\cos 60^\circ + i.\sin 60^\circ)$

C) O argumento de $z - z_1$ é igual a 40° . D) $2.(\cos 30^\circ + i.\sin 30^\circ)$

D) O argumento de $z_2.z_1$ é igual a 50° . E) $\cos 15^\circ + i.\sin 15^\circ$

Editora Bernoulli **71**

Frente E Módulo 15

15. (UEL-PR) Sejam z_1 e z_2 os números complexos **20.** (Cesgranrio) Seja $w = a + bi$ um complexo, em que $a > 0$

$z = 3.(\cos 30^\circ + i.\sin 30^\circ)$ e $z = 5.(\cos 45^\circ + i.\sin 45^\circ)$. e $b > 0$, e seja w o seu conjugado. A área do quadrilátero

O produto de z_1 por z_2 é o número complexo de vértices $w, w, -w$ e $-w$ é

$$\text{A) } 15.(\cos 1350^\circ + i.\sin 1350^\circ) \text{ A) } a_2 + b_2$$

$$\text{B) } 8.(\cos 75^\circ + i.\sin 75^\circ) \text{ B) } 4b^1ab$$

$$\text{C) } 8.(\cos 1350^\circ + i.\sin 1350^\circ)$$

$$\text{C) } 4ab$$

$$\text{E) } 15.(\cos 75^\circ + i.\sin 75^\circ) \left(a + b + \right) \text{ D) } 4 \left| \right| \text{ D) } 15.(\cos 15^\circ + i.\sin 15^\circ)$$

16. (UNIFESP-2007) Quatro números complexos representam, E) $(a + bi)_2$

no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três

dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e z_3

$$= -1 + i. \text{ O}$$

2

GABARITO

quarto número tem as partes real e imaginária positivas.

Esse número é **Fixação**

A) $2 + 3i$ D) $2 + i$ 01. E 11

2

B) $3 + 11i$ 02. C i E) $4 + 5i$ 2

03.
B

C) $3 + 5i$

04.
C

17. (FUVEST-SP) Dado o número complexo $z = 13 + i$, qual 05. C

é o **MENOR** valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um

número real? **Propostos**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

01.
E

18. (PUC-Campinas-SP) O módulo e o argumento do complexo 02. A

$(13 + i)_8$ são, respectivamente, 03. D

A) $4\sqrt{4}\pi$ e D) $3\sqrt{8}$ e 04. B $3\sqrt{4}$

05.

A

B) 2 e E) N.d.a. 06. A $8\sqrt{3}\pi$

C) $4\sqrt{8}$ e

8π 07. A

9 08. A

09.

D

19. (Unifor-CE-2007) Seja o número complexo $z = x + 3i$,

10.

D

em que x é um número real negativo. Se $|z| = 6$, então

a forma trigonométrica de 11. C z é

A) $6 \cdot \left(\sqrt{12} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} \right) \left| \cos + i \sin \cdot \left(\sqrt{3} \sqrt{3} \right) \right|$ 13. A

B) $6 \cdot \left(\sqrt{5\pi} \sqrt{5\pi} \right) \left| \cos + i \sin \cdot \left(\sqrt{6} \sqrt{6} \right) \right|$ 15. E

C) $6 \cdot \left(\sqrt{4\pi} \sqrt{4\pi} \right) \left| \cos + i \sin \cdot \left(\sqrt{3} \sqrt{3} \right) \right|$ 17. C

D) $6. \left(5 \pi \ 5 \pi \right) 18. A \left| \cos + i \operatorname{sen} . \right| \left(3 \ 3 \right) 19. B$

E) $6. \left(11\pi \ 11\pi \right) 20. C \left| \cos + i \operatorname{sen} . \right| \left(6 \ 6 \right)$

72 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Estatística 16 E

INTRODUÇÃO Gráficos:

Gráfico de colunas

A Estatística, objeto de estudo deste módulo, é a
área 10 10 10

da Matemática que tem por objetivo coletar,
organizar,

analisar e interpretar dados experimentais. Os
conceitos 8 8 estatísticos têm influenciado largamente
a maioria dos ramos

do conhecimento humano, seja para determinar
índices de 6 6 inflação, ou desemprego, comumente
divulgados, seja para

fornecer informações à Medicina que possibilitem
combater 4 4 uma determinada doença.

2 2

0 0

DISTRIBUIÇÃO DE 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5

5 5 6 6 6

FREQUÊNCIAS

Frequências Freqüências

Gráfico de setor

Após um levantamento estatístico, os dados coletados

podem ser organizados em uma tabela ou em um gráfico de 7 1

distribuição de frequências. São mais utilizados os gráficos 2 8 9

de barras, de colunas ou de setores.

Exemplo 4

Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela e os gráficos

9 10 5

a seguir mostram os seis resultados possíveis e as suas
7 6 respectivas frequências de ocorrências.

Tabela:

MEDIDAS DE TENDÊNCIA

Resultado 1 2 3 4 5 6 **CENTRAL**

Frequência

7 9 8 7 9 10 **Média aritmética**

absoluta

Frequência 7 9 8 7 9 10 Dados n elementos, calculamos a média aritmética

relativa 50 50 50 50 50 50 dividindo a soma desses elementos pela quantidade n .

Como mostrado na tabela anterior, a frequência relativa

Mediana

é obtida dividindo-se a frequência absoluta pelo total de

observações. Por exemplo, o resultado 6 apareceu em 10

Mediana é o valor que ocupa a posição central em

das 50 repetições, portanto sua frequência relativa é = conjunto for par, a mediana será a média aritmética dos 50 10 um conjunto ordenado. Se o número de elementos do 1



ou 0,2 ou 20%. dois valores centrais.



Yellow

Dark

Yellow

Yellow

Dark

Yellow

Yellow

Dark

Purple

Purple

Purple





—

—

—

—

—

—



■

■



■



—

—

—

—

—

—

—

—

—

1

2

3

4

5

6



7

8

9

10

11

12



—

Yellow bar

Yellow bar

—

—

—

—

—

—

—







|

■



|













-

-

|

.

•
•
•
•
•





▪

▪

▪

▪

|

|

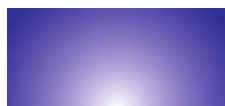
▪

|

▪









Frente E Módulo 16

Moda Desvio padrão

É o valor que apresenta maior frequência em um conjunto É a raiz quadrada da variância.

(aparece um maior número de vezes).

Exemplo $\sigma = \sqrt{V_i}$

Calcular a média aritmética, a mediana e a moda da **Exemplo**

seguinte distribuição de notas de uma turma.

Sobre a distribuição dos lucros de uma empresa nos
quatro

Aluno 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 primeiros meses, representada na tabela a seguir, calcular

Nota 4,0 7,0 5,0 8,0 7,5 10 6,5 8,0 6,5 5,5

A) a amplitude.

Resolução: B) os desvios de cada mês.

Pela definição, a média aritmética A das notas é dada por: C) a variância.

$A = \frac{4 + 7 + 5 + 8 + 7 + 5 + 10 + 6 + 5 + 8 + 6 + 5 + 5 + 5}{14} = 6,8$, + , + , + , + , D) o desvio padrão. $\Rightarrow 10$

A = 6,8 Mês Janeiro Fevereiro Março Abril

O conjunto ordenado C das notas dos alunos é:

termos **Lucro (R\$)** 10 000 30 000 90 000 30 000

! " centrais # \$ " #

$C = \{4,0; 5,0; 5,5; 6,5; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0; 8,0; 10\}$

Resolução

Como o número de elementos é par, então a mediana m

das notas é: Pelas definições:

$m = 6\,570, + , \Rightarrow m = 6,75$ A) A amplitude **a** é dada por: 2

As modas das notas são 6,5 e 8,0, pois esses valores $a = 90\,000 - 10\,000 = 80\,000$ reais

aparecem com maior frequência que os demais.

B) Para calcularmos o desvio, precisamos antes calcular

a média aritmética A dos lucros.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

$10\,000\ 30\,000\ 90\,000\ 30\,000 + + + A = \Rightarrow$ Fornecem informações a respeito da concentração dos 4 valores estudados em torno das medidas de tendência central.

$$\begin{aligned} A \\ = \\ 40 \\ 000 \end{aligned}$$

Amplitude Assim, os desvios d , d e d são dados por: $JFM A$

dado conjunto. É a diferença entre o maior e o menor valores de um $d = 10\,000 - 40\,000 = -30\,000$ reais J

Desvio $d = 30\,000 - 40\,000 = -10\,000$ reais FM

$$= 90\,000 - 40\,000 = 50\,000 \text{ reais}$$

É a diferença entre um valor qualquer e a média aritmética

do conjunto. $d = 30\,000 - 40\,000 = -10\,000$ reais _A

d C) A variância V é dada por: $= \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2$

$$= (22\,222 - 30\,000)^2 + (-10\,000)^2 + (50\,000)^2 + (-10\,000)^2$$

Variância $v = \Rightarrow$

4

É a média aritmética dos quadrados dos desvios. $V = 900\,000\,000$ reais ao quadrado

$d_{222} + d + \dots + d$ D) O desvio padrão s é dado por:

$$V = \frac{1}{2n}$$

$$n s = {}^1900\ 000\ 000 = 30\ 000 \\ \text{reais}$$

74 Coleção Estudo

Estatística

EXERCÍCIO RESOLVIDO EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG) Um professor de Física aplicou uma prova, **01.** (FGV-SP) A tabela a seguir apresenta a distribuição de

valendo 100 pontos, em seus 22 alunos e obteve, como frequências dos salários de um grupo de 50 empregados

resultado, a distribuição das notas vista no quadro de uma empresa, num certo mês.

seguinte:

**Número da Salário do mês Número de
classe em reais empregados**

40 20 10 20 70 60 1 [1 000, 2 000[20

90 2 [2 000, 3 000[18 80 30 50 50 70

3 [3 000, 4 000[9

50 20 50 50 10 40

4 [4 000, 5 000] 3

30 20 60 60

O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de

A) R\$ 2 637,00. D) R\$ 2 420,00.

Faça os seguintes tratamentos de dados solicitados.

B) R\$ 2 520,00. E) R\$ 2 400,00.

A) Determinar a frequência relativa da moda.

B) Esboçar um gráfico com as frequências absolutas de C) R\$ 2 500,00.

todas as notas. **02.** (UFRGS) Os resultados de uma pesquisa de opinião foram

C) Determinar a mediana dos valores da segunda linha divulgados utilizando um gráfico de setores circulares,

do quadro apresentado. como o representado na figura a seguir:

Resolução:

A) a b **Resultado** 10 20 30 40 50 60 70 80 90

MATEMÁTICA

Frequência c d

2 4 2 2 5 3 2 1 1

absoluta

A moda das notas é 50, e a frequência absoluta Ao setor **a** estão associadas 35% das respostas, ao destas é 5. setor **b**, 270 respostas e, aos setores **c** e **d**, um mesmo

Logo, a frequência relativa da moda é 5 número de respostas. Esse número é = 22,7 %. 22 A) 45 D) 450

B) 90 E) 900

B) O gráfico de colunas com as frequências absolutas de

C)
180

todas as notas é:

y **03.** (UNIRIO-RJ) Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela 5 a seguir mostra os seis resultados possíveis e as suas

4

respectivas frequências de ocorrências.

3

2 **Resultado** 1 2 3 4 5 6

Número de alunos 1 **Frequência** 7 9 8 7 9 10

O 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 Notas

A frequência de aparecimento de um resultado ímpar

foi
de

C) Na segunda linha, temos, em ordem crescente,

a seguinte sequência de notas: 30, 50, 50, 70, 80, 90. 2 1
A) D) 5 2 Como temos um número par de termos, então a

11 13

mediana **m** será a média aritmética dos dois valores B) E)

25 25

centrais.

Assim, $m = 50 \cdot 70 \cdot 12 + \Rightarrow m = 60$. C) 2 25

Editora Bernoulli 75

Frente E Módulo 16

04. (UNESP–2007) O número de ligações telefônicas de

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

uma empresa, mês a mês, no ano de 2005, pode ser

representado pelo gráfico a seguir: **01.** (UFLA-MG–2006) A idade de uma árvore pode ser avaliada

Ligações pela medida do diâmetro de seu tronco. A construção de

1 600 diagramas indicando a distribuição em intervalos de classe

1 500 1 500 para o diâmetro é uma forma de analisar a estrutura etária

1 400 de uma população de árvores. O gráfico a seguir mostra 1 350 a distribuição das classes de diâmetro para a espécie 1 300 1 300 1 300 1 250 1 220 1 220 1 200 1 200 1 200 arbórea *Xylopia aromatica* . 1 200

1 100 1 100 72

1 000 1 000

900 40

Com base no gráfico, pode-se afirmar que a quantidade N° de árvores 8 6 total de meses em que o número de ligações foi maior 4

ou igual a 1 200 e menor ou igual a 1 300 é O 2 4 6 8 1 0 1 2 1 4 1 6

A) 2 D) 7 Classes de diâmetro (cm)

B) 4 E) 8

Considerando esses dados, quantas árvores possuem

C) 6 troncos com diâmetro não inferiores a 8 cm?

05. A) 8 árvores (UFU-MG) Uma equipe de futebol realizou um levantamento

dos pesos dos seus 40 atletas e chegou à distribuição de B) 140 árvores

frequências dada pela tabela seguinte, cujo histograma C) 4 árvores

correspondente é visto a seguir: D) 18 árvores

Peso (kg) Frequência E) 10 árvores

60 64 2

64 02. (PUC-SP) O histograma a seguir apresenta a distribuição 68 5

de frequências das faixas salariais numa pequena empresa.

68 72 10

72 76 12 14 76 80 6

80 84 3

84 88 2

Total de atletas 40

Histograma Nº de funcionários 4 2

0 500 1 000 1 500 2 000 2 500 Salários

12 em reais

10

Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média

6 desses salários é, aproximadamente,

5

Frequência 3 A) R\$ 420,00.

2

B)
R\$
536,00.

O 62 66 70 74 78 82 86 Peso (kg)

Com base nestes dados pode-se afirmar que o valor da C) R\$
562,00.

mediana dos pesos é igual a D) R\$ 640,00.

A) 75 B) 72 C) 74 D) 73 E) R\$ 708,00.

76 Coleção Estudo

Estatística

SP-2007) O gráfico a seguir indica as massas de

fumantes e promove um ciclo de palestras com os um grupo de objetos.

mesmos para esclarecimentos sobre os efeitos prejudiciais do cigarro à saúde. Após essas palestras, são coletados 3

dados sobre a quantidade de cigarros que cada um desses fumantes está consumindo diariamente. Tais dados são 2 expressos da seguinte maneira:

10, 1, 10, 11, 13, 10, 34, 13, 13, 12, 12, 11, 13, 11, 12, 12 Nº de objeto

Os dados 1 e 34 são chamados discrepantes, pois são

0 3 4 6

dados muito menores ou muito maiores que a maioria

Massa da cada objeto (em kg)

dos dados obtidos. Segundo essa coleta de dados,

pode-se afirmar que Acrescentando-se ao grupo n objetos de massa 4 kg

A) os cálculos da média, da mediana e da moda não cada, sabe-se que a média não se altera, mas o desvio

sofrem influência dos dados discrepantes. padrão reduz-se à metade do que era. Assim, é **CORRETO**

afirmar que n é igual a

B) o cálculo da mediana sofre influência dos dados

discrepantes que surgiram. A) 18

C) o cálculo da moda sofre influência dos dados B) 15

discrepantes que surgiram.

C)

12

D) o cálculo da média sofre influência dos dados

discrepantes que surgiram. D) 9

E)

8

04. (UFU-MG) O Departamento de Comércio Exterior do Banco

Central possui 30 funcionários com a seguinte distribuição

MATEMÁTICA

07. (UFRGS) As questões de Matemática do Concurso

salarial em reais.

Vestibular da UFRGS de 2004 foram classificadas em

Nº de categorias quanto ao índice de facilidade, como mostra 10 12
5 3 **funcionários** o gráfico de barras a seguir:

Salários em R\$ 2 000,00 3 600,00 4 000,00 6 000,00

Quantos funcionários que recebem R\$ 3 600,00 devem 14

ser demitidos para que a mediana desta distribuição de

salários seja de R\$ 2 800,00? 10

A) 8

B) 11

Nº de

C) 9 1

D) 10 0 muito fácil mediana difícil muito Categoria

fácil difícil

E) 7

Se esta classificação fosse apresentada em um gráfico de

05. setores circulares, a cada categoria corresponderia um

(FGV-SP-2007) Quatro amigos calcularam a média e

setor circular. O ângulo do maior desses setores mediria

a mediana de suas alturas, tendo encontrado como

resultados 1,72 m e 1,70 m, respectivamente. A média A) 80°

entre as alturas do mais alto e do mais baixo, em metros,

B)
 120°

é igual a

C)
 157°

A) 1,70 D) 1,73

B) 1,71 D) 168° E) 1,74

C) 1,72 E) 172°

Editora Bernoulli **77**

Frente E Módulo 16

08. (UFPR–2007) Os dados a seguir representam o tempo **10.** (FGV-SP) Um conjunto de dados numéricos tem variância

(em segundos) para carga de um determinado aplicativo, igual a zero. Podemos concluir que

num sistema compartilhado. A) a média também vale zero.

B) a mediana também vale zero.

Tempo (s) Frequência C) a moda também vale zero.

4,5 5,5 D) o desvio padrão também vale zero. 03

E) todos os valores desse conjunto são iguais a zero.

5,5 6,5 06

11. (UFSCar-SP) Num curso de iniciação à Informática,

6,5 7,5 13

a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo,

7,5 é dada pelo gráfico seguinte. 8,5 05

8,5 meninas 9,5 02

s 4 meninos

9,5 10,5 01

3

Total 30

2

Com base nesses dados, considere as afirmativas a seguir:

1. O tempo médio para carga do aplicativo é de Número de aluno 1

7,0 segundos.

2. A variância da distribuição é aproximadamente Idade dos alunos em anos

1,33 segundo ao quadrado.

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que

3. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância. A) o número de meninas com, no máximo, 16 anos

é maior que o número de meninos nesse mesmo

4. Cinquenta por cento dos dados observados estão intervalo de idades.

abaixo de 6,5 segundos.

B) o número total de alunos é 19.

Assinale a alternativa **CORRETA**. C) a média de idade das meninas é 15 anos.

A) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras. D) o número de meninos é igual ao número de meninas.

B) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras. E) o número de meninos com idade maior que 15 anos

é maior que o número de meninas nesse mesmo

C) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras. intervalo de idades.

D) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

12. (FUVEST-SP) A distribuição dos salários de uma empresa

E) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras. é dada na tabela a seguir:

Salário (em R\$) N° de funcionários

09. (UFU-MG-2006) As 10 medidas colhidas por um cientista

num determinado experimento, todas na mesma unidade,
foram as seguintes: 1 000,00 5

1,2; 1,2; 1,4; 1,5; 1,5; 2,0; 2,0; 2,0; 2,0; 2,2 1 500,00 1

2 000,00 10

Ao trabalhar na análise estatística dos dados, o cientista
esqueceu-se, por descuido, de considerar uma dessas 5 000,00 4
medidas. Dessa forma, comparando os resultados obtidos 10 500,00
1
pelo cientista em sua análise estatística com os resultados

Total 31

corretos para esta amostra, podemos afirmar que

A) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa

A) a moda e a média foram afetadas.

empres

B) a moda não foi afetada, mas a média foi. B) Suponha que sejam
contratados dois novos

funcionários com salários de R\$ 2 000,00 cada.

C) a moda foi afetada, mas a média não foi.

A variância da nova distribuição de salários ficará

D) a moda e a média não foram afetadas. menor, igual ou maior que
a anterior?

13. (UFJF-MG-2007) Um professor de matemática elaborou, **15.**
(UFJF-MG-2009) Um professor fez o levantamento das

através do computador, um histograma das notas obtidas notas de
uma turma composta de 20 alunos. As notas

pela turma em uma prova cujo valor era 5 pontos. foram obtidas em
uma prova cujo valor era 10 pontos.

Entretanto, o histograma ficou incompleto, pois este Veja o gráfico a
seguir:

professor esqueceu-se de fornecer o número de alunos

5

que obtiveram notas iguais a 2, 4 ou 5. Veja a ilustração 4

a seguir. 3

2

7 Histograma de notas em Matemática (Incompleto) 1

Frequência 0 3 4 5 6 7 8 9 6 Notas 5

4

3 Depois de confeccionado esse gráfico, o professor 2

1 percebeu ter errado a nota de um dos alunos e verificou

Número de alunos 0 que, feita a correção, a média das notas dessa
turma 0 1 2 3 4 5

Notas aumentaria em 0,2 ponto e a moda passaria a ser

i) Total de alunos que fizeram a prova: 40 7 pontos. A nota que
estava **ERRADA** era

ii) Média aritmética das notas: 2,6 A) 3

B)

4

iii) Mediana das notas: 2,5

A moda dessas notas é C) 5

A) 1 D) 6 D) 4

B) 2 E) 7 E) 5

C) 3 **16.** (Unimontes-MG–2008) Qual a média aritmética (M_a),

14. (UFJF-MG) A editora de uma revista de moda resolveu fazer **MATEMÁTICA** dados da tabela de frequências a seguir? a moda (M_o) e a mediana (M_e), respectivamente, dos

uma pesquisa sobre a idade de suas leitoras. Para isso

Idade dos alunos da 7ª A – Escola Gama – 2007

selecionou, aleatoriamente, uma amostra de 25 leitoras.

As idades que constaram da amostra foram **Idade Frequência**

19, 20, 21, 20, 19, 20, 19, 20, 21, 21, 21, 22, 20, 21, 13 3

22, 22, 23, 19, 20, 21, 21, 23, 20, 21, 19.

14 2

Considerando as informações dadas, faça o que se pede. 15 4

A) 16 1 **COMPLETE** a tabela de frequências absoluta (f) e

relativa (fr) a partir dos dados anteriores.

Total 10

Idade f fr (%) Fonte: SECRETARIA DA ESCOLA GAMA.

A) 14,5; 15; 14,3

B) 14,5; 15; 14,5

C) 14,3; 14,5; 15

D) 14,3; 15; 14,5

17. (FGV-SP-2008) Sejam os números 7, 8, 3, 5, 9 e 5 seis números de uma lista de nove números inteiros. O maior **Total** valor **POSSÍVEL** para a mediana dos nove números da lista é

B) Foi escrita uma reportagem dirigida a leitoras de

21 anos. Considerando que a pesquisa admite uma A) 5 D) 8 margem de erro de 2%, para mais e para menos,

B) 6 E) 9

quantas leitoras dessa idade leram a matéria,

sabendo-se que foram vendidas 3 500 revistas? C) 7

Editora Bernoulli 79

Frente E Módulo 16

SEÇÃO ENEM 03. (Enem-2009) A tabela mostra alguns dados da emissão de

dióxido de carbono de uma fábrica em função do número

01. de toneladas produzidas. (Enem-2009) Na tabela, são apresentados dados da

cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, **Produção**
Emissão de dióxido de carbono

em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em **(em toneladas) (em partes por milhão – p.p.m.)**

alguns meses dos anos 2007 e 2008. 1,1 2,14

1,2 2,30

Mês Cotação Ano

1,3 2,46

Outubro R\$ 83,00 2007 1,4 2,64

Novembro R\$ 73,10 2007 1,5 2,83

Dezembro 1,6 3,03 R\$ 81,60 2007

1,7 3,25

Janeiro R\$ 82,00 2008

1,8 3,48

Fevereiro R\$ 85,30 2008 1,9 3,73

Março R\$ 84,00 2008 2,0 4,00

Abril Cadernos do Gestar II. Matemática TP3. R\$ 84,60
2008

Disponível em: . Acesso em: 14 jul. 2009.

De acordo com esses dados, o valor da mediana das Os dados na
tabela indicam que a taxa média de variação

cotações mensais do ovo extra branco nesse período entre a emissão
de dióxido de carbono (em p.p.m.) e a

era igual a produção (em toneladas) é

A) R\$ 73,10. A) inferior a 0,18.

B) R\$ 81,50. B) superior a 0,18 e inferior a 0,50.

C) superior a 0,50 e inferior a 1,50.

C) R\$ 82,00.

D) superior a 1,50 e inferior a 2,80.

D) R\$ 83,00.

E)
superior
a
2,80.

E) R\$ 85,30.

04. (Enem–2010) O gráfico apresenta a quantidade de gols

02. (Enem–2009) Suponha que a etapa final de uma gincana marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a

escolar consista em um desafio de conhecimentos. Copa de 1930 até a de 2006.

Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma

Quantidades de gols dos artilheiros

prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela **das Copas do Mundo**

mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, Gols 14 no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi

12

a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe

10

Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama,

a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde

comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas 6

obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 4

8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0. 2

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, o

essa equipe 1920 1930 1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000 2010

Ano

A) teria a pontuação igual a 6,5, se ele obtivesse nota 0. Disponível em: .

Acesso em: 23 abr. 2010 (Adaptação).

B) seria a vencedora, se ele obtivesse nota 10.

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das

C) seria a segunda colocada, se ele obtivesse nota 8.

quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas

D) permaneceria na terceira posição, independentemente do Mundo?

da nota obtida pelo aluno. A) 6 gols D) 7,3 gols

E) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação, B) 6,5 gols E) 8,5 gols

se o aluno obtivesse nota 9. C) 7 gols

80 Coleção Estudo

Estatística

05. (Enem–2010) Marco e Paulo foram classificados **07.** (Enem–2010) Em uma corrida de regularidade, a equipe

em um concurso. Para a classificação no concurso, campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais

o candidato deveria obter média aritmética na pontuação se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em

igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas,

o desempate seria em favor da pontuação mais regular. e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi

No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados

nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos os dados estatísticos das cinco equipes mais bem

Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos classificadas.

dois candidatos. **Dados estatísticos das equipes mais bem**

Dados dos candidatos no concurso classificadas (em minutos)

Matemática	Português	Conhecimentos	Média	Mediana	Desvio	
Equipes	Média	Moda	Desvio	padrão	gerais	padrão

Equipe I 45 40 5

Marco 14 15 16 15 15 0,32

Equipe II 45 41 4

Paulo 8 19 18 15 18 4,97

Equipe III 45 44 1

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais Equipe IV 45 44 3

bem classificado no concurso, é

Equipe V 45 47 2

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã

B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

foi
a
equipe

C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela,

A)
I

19 em Português.

B)
II

D) Paulo, pois obteve maior mediana.

C) III **MATEMÁTICA**

E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

D)
IV

06. (Enem–2010) O quadro seguinte mostra o desempenho E) V

de um time de futebol no último campeonato. A coluna da

esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna **08.**

(Enem–2009) Depois de jogar um dado em forma de cubo

e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas,

da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele

e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se

número de gols.

a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Gols marcados **Quantidade de partidas**

0 5 **Número obtido** **Frequência**

1 3 1 4 2 4

2 1

3 3

4 2

4 2

5 5 2 2

7 1 6 1

Se **X**, **Y** e **Z** são, respectivamente, a média, a mediana e a moda dessa distribuição de

a moda desta distribuição, então frequências são, respectivamente,

A) $X = Y < Z$ A) 3, 2 e 1

B) $Z < X = Y$ B) 3, 3 e 1

C) $Y < Z < X$ C) 3, 4 e 2

D) $Z < X < Y$ D) 5, 4 e 2

E) $Z < Y < X$ E) 6, 2 e 4

Editora Bernoulli **81**

Frente E Módulo 16

09. (Enem–2009) Cinco equipes **A**, **B**, **C**, **D** e **E** disputaram

uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas 06. A podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi 07. D de 2 pontos. As notas das equipes foram colocadas no

gráfico a seguir; entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe 09. B **D** e da equipe E .

10.
D

Pontuação da gincana

3 11. D

12. A) Média: R\$ 2 000,00

2 Mediana: R\$ 1 500,00

1

? ? B) A variância ficará menor. 13. D

0 14. A)

A B C D E

Idade f fr(%)

Mesmo sem aparecer as notas das equipes **D** e **E**,

19 5 20

pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente, 20 7 28

A) 1,5 e 2,0 21 8 32

B) 2,0 e 1,5 22 3 12

C) 2,0 e 2,0 23 2 8

D) 2,0 e 3,0 **Total 25 100**

E) 3,0 e 2,0

GABARITO 15. A

Fixação 16. D

17.
D

01. E

02. D **Seção Enem**

03. C 01. D

04. E 02. D

05. D 03. D

Propostos 04. B

01. D 05. B

02. E 06. E

03. D 07. C

04. D 08. B

05. E 09. C

